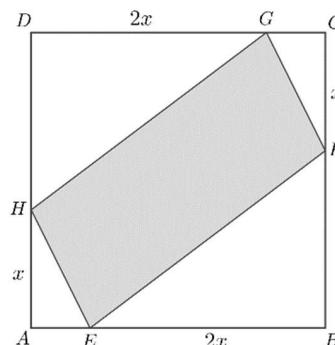


I.

1. Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az $EFGH$ paralelogrammát írjuk. Az AH és a CF szakasz hossza x méter, a BE és a DG szakasz hossza $2x$ méter ($0 < x < 2$).



a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe (m^2 -ben mérve):

$$T(x) = 4x^2 - 12x + 16.$$

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1,25$.

2. a) Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384.

Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!

b) Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata és összege is 12?

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 324$

b) $\sqrt{6x-24} = \sqrt{2x-7} - 1$

4. Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30° -os szöveget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Határozza meg a tetraéder térfogatát!

A tetraéderrel 1-est, 2-est, 3-ast vagy 4-est lehet dobni (a dobás eredményének az alsó lapon lévő számot tekintjük). Az 1-es, a 2-es, illetve a 3-as dobásának valószínűsége egyenlő. A 4-es dobásának valószínűsége ötször akkora, mint az 1-es dobásé.

b) Ha a bűvész a két dobótetraédert egyszerre dobja fel, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 lesz?

II.

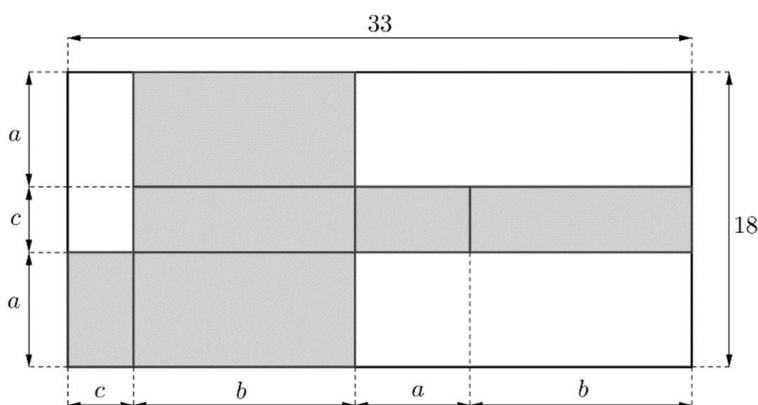
Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek.

A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az ábra szerint választják meg.

a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm!

b) Hogyan kell megválasztani az a , b , c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van, amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem?

6. Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3 \cdot \sqrt{2}$.

a) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$ és $C(0; 8)$.

b) Igazolja, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű e egyenes felezi az ABC háromszög kerületét és területét is!

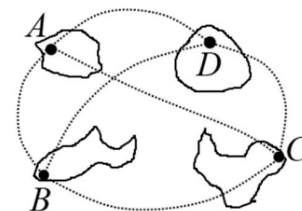
7. Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötponútú gráfot kapunk.

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatának bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az ábra azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.)



A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.

b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg?

A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatokon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve?

8. A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár.

Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.¹

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos!

c) Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot!

(A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú „szó” létezik.)

9. a) Hány olyan 1000-nél kisebb p pozitív egész szám van, amelyre a p és a 42 relatív prímek?

A következő táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

A fehér, illetve szürke színű „L alakú” sávokban lévő számok összege:

$$L_1 = 1,$$

$$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8,$$

$$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27, \dots$$

b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
...										...

c) Igazolja, hogy az első n pozitív köbszám összege $K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
4	4	6	6	7	6	7	6	5	3	9	4	6	10	4	7	5	3	6	7	6	4	6

¹ <https://play.google.com/store/apps/details?id=words.gui.android&hl=hu>