I.

1. Negyven egyetemi hallgató férfi egész kilogrammra kerekített testtömegéről ad tájékoztatást az alábbi táblázat.

tömeg (kg)	53 – 56	57 – 60	61 – 64	65 – 68	69 – 72	73 – 76	77 – 80
gyakoriság	2	3	4	11	9	6	5

a) A táblázat alapján, az osztályközepek segítségével számítsa ki a 40 hallgató testtömegének átlagát és szórását! (Osztályközép: az osztály alsó és felső határának számtani közepe.)

Egy reklámfilm forgatásához három „pehelysúlyú” és két „nehézsúlyú” fiatalt keresnek. A „pehelysúlyúak” tömege legfeljebb 64 kg lehet, a „nehézsúlyúaké” pedig legalább 77 kg.

b) Hányféleképpen választhatják ki az öt szereplőt, ha mindegyikük a 40 egyetemista közül kerül ki?

Péter – az egyik hallgató – öt érdemjegyet szerzett statisztika tantárgyból az előző félévben. Jegyeinek mediánja a 3, módusza a 2, átlaga pedig 3,2. (Érdemjegy az 1, 2, 3, 4, 5 számok valamelyike lehet.)

c) Határozza meg Péter öt érdemjegyének az érdemjegyek átlagától számított átlagos abszolút eltérését!

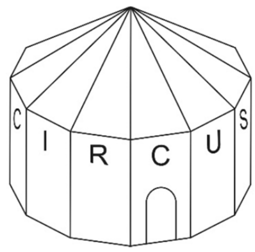
2. a) Egy síkbeli négyszög szögei (fokban mérve) egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek hányadosa 3. Határozza meg a négyszög szögeit!

b) Egy konvex sokszög szögei (fokban mérve) egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja 143, differenciája 2. Határozza meg a sokszög oldalainak számát!

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 5x < 50$

b) $\log_3(x^2) - \log_9(81x) \leq 1$



4. Egy cirkuszi sátor alsó része szabályos tizenkétszög alapú egyenes hasáb, a felső része pedig szabályos tizenkétszög alapú gúla, amelynek alaplapja a hasáb fedőlapjára illeszkedik.
Az alapélek hossza 5 méter, a hasáb alakú rész magassága 8 méter, a felső, gúla alakú rész magassága 3 méter. A téli időszakban a sátrat olyan (egyforma) fűtőtestekkel fűtik, amelyek egyenként 200 m^3 befűtésére elegendők.

a) Legalább hány ilyen fűtőtestre van szükség?

Titi és Jeromos zsonglőrök az egyik műsorszámukban több buzogányt dobálnak egymásnak. Mindkét zsonglőr nagyon ügyes, hiszen mindegyikük átlagosan csak háromszor hibázik ezer esetből a buzogány elkapásakor (ezt úgy tekintjük, hogy minden elkapáskor 0,003 a hibázás valószínűsége). A két zsonglőr legújabb műsorszámában összesen 72 buzogányelkapás szerepel.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy buzogányelkapási hiba csúszik az előadásukba? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. a) Mely egész számokra teljesül a $[0; 2\pi]$ intervallumban a $\cos x < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség?

b) Hány olyan egész szám van, amelyre teljesül a $|2x - 20| + |x - 15| < 2015$ egyenlőtlenség?

c) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} - 1$ függvény.
Hány rácspontot tartalmaz az f függvény grafikonja és a koordinátatengelyek által az első síknegyedben közbezárt síkidom?
(A síkidom határolóvonalait is a síkidomhoz tartozónak tekintjük.)

6. a) Az A, B és C nemüres halmazokról tudjuk a következőket:
az A minden eleme a B-nek is eleme, továbbá C-nek van olyan eleme, amelyik A-nak is eleme.
Az alábbi öt állítás mindegyikéről döntse el, hogy igaz vagy hamis! (Válaszait nem kell indokolnia.)

(1) Van olyan eleme A-nak, amelyik C-nek is eleme.
(2) Nincs olyan eleme C-nek, amelyik B-nek is eleme.
(3) Ha valami eleme B-nek, akkor eleme A-nak is.
(4) Ha valami nem eleme B-nek, akkor az eleme C-nek.
(5) Ha valami nem eleme B-nek, akkor az nem eleme A-nak sem.

Egy 34 fős osztály matematikatanára az egyik óra elején egy rövid, öt kijelentést tartalmazó tesztet írat. A tanulóknak meg kell határozniuk a kijelentések logikai értékét (igaz vagy hamis). A feladatok sorszámuk szerint fokozatosan nehezedők, ennek megfelelő a pontozás is: az n-edik feladat esetén a helyes válasz n pontot ér, a hibás válaszért pedig n pont levonás jár ($n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$). Tudjuk, hogy mind a 34 tanuló mind az öt tesztkérdésre válaszolt.

b) Bizonyítsa be, hogy van két olyan tanuló, aki ugyanúgy töltötte ki a tesztlapot!

c) Mutassa meg, hogy a teszttel elért összpontszám csak páratlan egész szám lehet!

Jól sikerült tesztet írt Adél, Béla és Csilla, az osztály három tanulója. Tesztjeikkel összesen 39 pontot értek el.

d) Hányféleképpen lehet három, 15-nél nem nagyobb páratlan egész szám összegeként a 39-et felírni, ha az összeadandók sorrendjét is figyelembe vesszük?

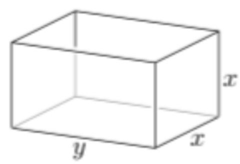
7. a) Számítsa ki az a, b és c értékét, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ és $a \neq 0$) függvényről tudjuk, hogy $f'(2) = 6$ és $f'(6) = 2$, valamint $\int_0^2 f(x)dx = \frac{50}{3}$.

b) Határozza meg annak a $P(0; 35)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amely érinti az $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3$ egyenletű parabolát!

8. Egy négyzetes oszlopnak (négyzet alapú egyenes hasábnak) pontosan négy olyan éle van, amelyik 10 cm hosszú. Az oszlop testátlójának hossza 12,5 cm.

a) Számítsa ki a négyzetes oszlop felszínét!

Négyzetes oszlop alakú üveg akváriumot vettünk. A választott akvárium felülről nyitott, négyzetlapjai függőleges síkúak (az ábra szerint), és pontosan 288 liter víz fér bele. Azt szeretnénk tudni, hogy a belső üvegfelületek káros algásodása szempontjából kedvező volt-e a választásunk.



b) Számítsa ki, hogy – a megadott feltételek mellett – hány deciméter hosszúak a lehető legkisebb belső felületű akvárium (belső) élei!

9. Ottó osztálylottót szervez, melyben az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok közül ötöt húznak ki. Egy játékszelvényen ennek megfelelően pontosan öt számot kell megjelölni (az ábra egy üres szelvényt és egy érvényesen kitöltött szelvényt mutat).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	3
4	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$
7	$\cancel{8}$	9

a) András legalább három találatot szeretne elérni, és ehhez a lehető legkevesebb szelvényt akarja kitölteni.
Hány szelvényre van szüksége ahhoz, hogy legalább az egyik szelvényen biztosan legyen legalább három találata?

b) Dóra és Zoli is véletlenszerűen (és érvényesen) kitölt egy-egy szelvényt.
Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan négy közös számot jelölnek be?

c) Hány különböző módon lehet kitölteni az osztálylottószelvényt úgy, hogy a bejelölt öt szám szorzata osztható legyen 3780-nal?

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	7a	7b	8a	8b	9a	9b	9c
5	3	5	4	8	4	9	8	5	3	8	5	3	4	4	5	7	9	6	10	4	5	7