

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\lg x < 2$ b) $4x < 5 - x^2$ c) $0,5^{|x-3|} < 0,25$

2. Noémi első egyetemi vizsgája három részből áll: egy projekt munkából, egy írásbeli dolgozattól, valamint egy szóbeli feleletből. Mindhárom rész eredményét százalékban adják meg.

A vizsga végeredményét egyetlen számmal jellemzik úgy, hogy kiszámolják a három rész százalékban megadott eredményének súlyozott számtani közepét: a projekt munka eredményét 2-es súllyal, az írásbeli dolgozat eredményét 5-ös súllyal, a szóbeli felelet eredményét 3-as súllyal veszik figyelembe. Noémi projekt munkája 73%-os, írásbeli vizsgája 64%-os lett.

a) Hány százalékra kell teljesítenie a szóbeli vizsgáját, hogy vizsgájának végeredménye legalább 70%-os legyen?

Az első évfolyam adatainak összesítésekor kiderült, hogy a 75 lány vizsgaeredményeinek átlaga 70%, a fiúk vizsgaeredményeinek átlaga 62% lett. A kollégiumban lakó 40 hallgató vizsgaeredményeinek átlaga 71%, a nem kollégistáké pedig 65% lett.

b) Hányan vizsgáztak összesen az első évfolyamról?

3. Egy baráti társaság 8 tagjának tömegét mutatja az alábbi táblázat.

név	Albert	Bori	Csaba	Dénes	Elek	Frigyes	Gabi	Helga
tömeg (kg)	82	74	90	88	85	85	63	71

a) Adja meg a 8 adat mediánját, átlagát és szórását!

Ez a 8 ember lifttel szeretne feljutni egy épület legfelső emeletére, ahol a baráti társaság rendezvényét tartják. A kisméretű lift ajtaján ez a felirat áll: „*Max. 3 személy vagy 230 kg*” (vagyis a liftben nem utazhat 3-nál több személy, továbbá a liftben utazók tömegének összege nem lehet több 230 kg-nál).

b) Igazolja, hogy a lift három fordulója már elegendő ahhoz, hogy (az előírás betartásával) mind a 8 ember lifttel mehessen fel a rendezvény helyszínére!

A lift felújításakor a liftben együtt utazók megengedett össztömegét 300 kg-ra növelik, de a személyek számára vonatkozó korlátozás megmarad (legfeljebb 3 fő utazhat együtt).

c) Az új előírás figyelembevételével hányféleképpen mehetne fel a baráti társaság 8 tagja a lifttel, ha minden fordulóban legalább két személy utazna együtt? (Két „feljutást” különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csoport összetétele nem azonos a két feljutásban, vagy a csoportok más sorrendben jutottak fel a legfelső emeletre.)

4. a) Mekkora területű síkidomot zár közre az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola és az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenes?

Az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontban metszi.

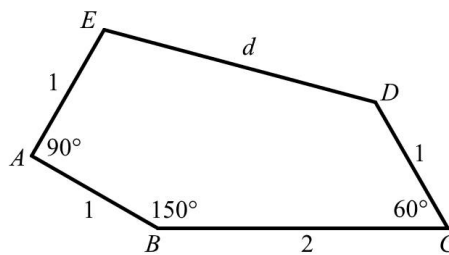
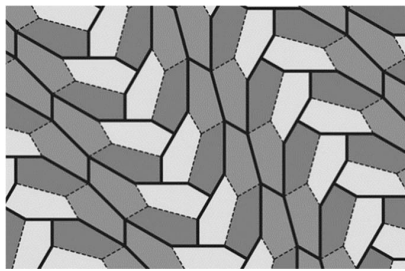
b) Számítsa ki a parabola B pontbeli érintőjének meredekségét, ha tudjuk, hogy a B pont első koordinátája pozitív!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Az interneten érdekes hírként jelent meg 2015-ben, hogy a matematikusok újabb, egybevágó ötszögekből álló hézagmentes síklefedést (parkettázást) fedeztek fel. (A két ábrán a parkettázás egy részlete, illetve a parketta egyik ötszögének néhány adata látható:

$$EA = AB = CD = 1, BC = 2, \angle EAB = 90^\circ, \angle ABC = 150^\circ, \angle BCD = 60^\circ.)$$



- a) Igazolja, hogy az ábrán megadott ötszög B csúcsából húzott két átló 75° -os szöget zár be egymással!
- b) Igazolja (például addíciós tételek segítségével), hogy $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- c) Igazolja, hogy az ötszög DE oldala hosszának pontos értéke $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
- d) Igazolja, hogy $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
6. a) Az A és C kijelentések logikai értéke igaz, a B kijelentés logikai értéke hamis. Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét! (Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)
- (1) $\neg A \vee \neg B$
 - (2) $(A \wedge B) \vee \neg C$
 - (3) $B \rightarrow \neg A$
 - (4) $\neg A \leftrightarrow B$
 - (5) $A \rightarrow (B \wedge C)$

A H halmaz a tízpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik:
Ha egy (tízpontú egyszerű) gráfnak legfeljebb 8 éle van, akkor nem tartalmaz kört.

- b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
- c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
- Egy tízpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt.
(Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)
- d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három kiválasztott él a gráfnak egy körét alkotja!
7. a) Hány olyan különböző hegyesszögű háromszög van, melynek szögei fokban mérve különböző egész számok, és a szögek egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha nem hasonlók egymáshoz.)
- b) Igazolja, hogy nincs olyan szabályos n -szög, amelynek a belső szögei n fokosak!
- c) Egy szabályos n -szögről tudjuk, hogy a belső szögei fokban mérve egész számok. Hányféle lehet az n értéke?
8. Járványos időszakban egy nagyváros lakóinak 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Ebben az időszakban a város lakói közül 80-an ugyanazon az autóbussen utaznak.
- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az autóbusz 80 utasa között van legalább egy fertőzött? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A járvány terjedésére vonatkozó előrejelzések szerint a nagyvárosban a fertőzöttek száma minden nap az előző napi érték 105%-ára növekszik.

- b) Ha a növekedés üteme az előrejelzés szerint alakulna, akkor hány nap alatt emelkedne a város összlakosságának 0,2%-áról az összlakosság 1%-ára az összes fertőzött száma?

Egy kereskedelmi forgalomban is kapható gyorseszteszt azt ígéri a felhasználóknak, hogy a teszt kimutatja a vírust fertőzést. A termék leírásában ez áll: „*A teszt a vírussal fertőzött embereknél 99% valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget. A vírussal nem fertőzött emberek esetében olykor szintén fertőzöttséget jelez a teszt, ám ennek a téves jelzésnek a valószínűsége mindössze 4%.*”

c) Tudjuk, hogy a város lakosságának 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal.

Mutassa meg, hogy ha egy véletlenszerűen választott városlakó gyors teszttel fertőzöttséget mutat, akkor 0,05-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a tesztalany valóban vírusfertőzött (tehát a gyors teszt nem a fertőzöttség megbízható kimutatására alkalmas)!

9. Több részletben összesen 350 tonna árut szeretnénk vasúton elszállíttatni. Az egyik szállítócég ajánlatában a szállítási díj két összetevőből áll. Egyrészt a szállított áru tömegének négyzetével arányos díjat kell fizetnünk, másrészt az áru tömegétől független állandó alapidíjat is felszámítanak: ha egyszerre t tonna áru elszállítását rendeljük meg, akkor ezért $\frac{t^2}{10} + 205$ eurót kell fizetnünk.

a) Igazolja, hogy ha két részletben (két alkalommal) szállíttatnánk el a 350 tonna árut, akkor a vasúti költség abban az esetben lenne a legkisebb, ha az árut két egyenlő tömegű részre osztanánk!

A vasúti szállítás költségének csökkentése érdekében a 350 tonna tömegű árut n egyenlő részre osztjuk, és azt tervezzük, hogy minden egyes alkalommal egy-egy részt szállíttatunk el a vasúttal. ($n \in \mathbf{N}^+$)

b) Igazolja, hogy a szállítócég ajánlata szerint az n alkalommal történő vasúti szállítás költsége összesen $\frac{12250}{n} + 205n$ euró lenne!

A vasúti szállítás költségén kívül figyelembe kell vennünk azt is, hogy ha a 350 tonna árut n egyenlő tömegű részre akarjuk szétosztani, akkor a munka elvégzéséért nekünk $(n - 1) \cdot 400$ eurót kell fizetnünk. ($n \in \mathbf{N}^+$)

c) Hány egyenlő tömegű részletre bontva lenne a legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása?

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
3	4	5	4	7	4	3	7	8	6	5	3	5	3	3	3	4	6	4	4	8	4	5	7	4	3	9