I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{2x+11}{3}=\sqrt{x^2+6x+9}$

b) $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)-\log_2(x+9)=1$

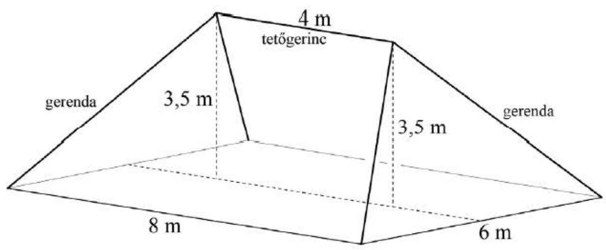
2. Egy 28 fős osztályban minden tanulónak van év végi osztályzata fizikából és matematikából is. 23 tanuló nem kapott jelest fizikából, és 21 tanuló nem kapott jelest matematikából, de a két tárgy közül legalább az egyikből 10-en kaptak jelest.

a) Hány tanulónak van jelese mindkét tárgyból?

Az A és B halmazokról tudjuk, hogy az $A \setminus B$, az $A \cap B$, az A és a B halmaz elemszáma (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat első négy tagja. Az A halmaz elemszámának és a B halmaz elemszámának összege 28.

b) Határozza meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját!

3. Egy 6 méter széles és 8 méter hosszú, téglalap alaprajzú épületre „sátortetőt” építettek. A tető 4 méter hosszú gerince a mennyezet téglalapjának hosszabbik középvonala fölött, attól 3,5 méter távolságra van. A mennyezet téglalapjának négy csúcsában támaszkodó, négy egyenlő hosszúságú gerenda tartja a tetőgerincet.



a) Számítsa ki a tartógerendák hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket!

A tető déli irányba néző, trapéz alakú részére egy téglalap alakú napelemet fektetnek. A téglalap egyik oldala a tető alsó élére, az ezzel szemközti oldala pedig a trapéz középvonalára illeszkedik. A napelem sehol sem nyúlik túl a tetőn.

b) Mekkora a legnagyobb területű napelem, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? Válaszát négyzetméterben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

4. Egy város kézilabdacsapatának vezetői a bajnoki mérkőzések jegybevételét szeretnék növelni. A korábbi évek adatai azt mutatják, hogy 1500 Ft-os jegyár esetén átlagosan 1000-en vásárolnak jegyet. Az adatokból az is kiderül, hogy ahányszor 5 Ft-tal csökkentik a jegy árát, átlagosan annyiszor 10 fővel többen váltanak jegyet az adott mérkőzésre; ha a jegyárat növelik, akkor pedig ahányszor 5 Ft-tal nő a jegy ára, átlagosan annyiszor 10 fővel csökken a jegyet vásárló nézők száma. (A jegy ára forintban kifejezve 0-ra vagy 5-re végződhet.)

a) Mutassa meg, hogy ha a jelenlegi jegyár 1500 forint, akkor a fenti modell szerint a jegyárak bármilyen összegű növelése esetén csökkenni fog az összbevétel!

b) A modell szerint mekkora lehet a jegyárakból származó legnagyobb bevétel egy mérkőzésen, és mennyit kell fizetni ebben az esetben egy jegyért?

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

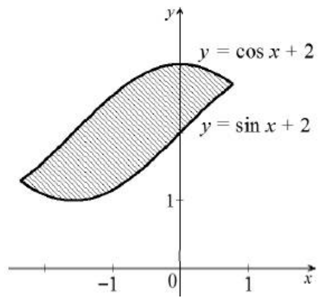
5. Egy üzemben két automata gépsoron egyforma ingeket gyártanak. Az első gépsoron gyártott 4000 ingnek a 2%-a, a második gépsoron készült 5000 ingnek pedig a 3,4%-a anyaghibás.
Az elkészült ingek ugyanabba a raktárba kerültek és összekeveredtek. A 9000 ing közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt anyaghibásnak találjuk.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás inget a második gépsoron gyártották?

A Kis Áruházban egy anyaghibás ing árából először 500 Ft árengedményt adtak, majd nemsokára az új árat tovább csökkentették annak p%-ával. Így az ing 50 Ft-tal drágább lett, mint ha először engedték volna le az árát p%-kal és utána 500 Ft-tal, viszont 90 Ft-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer p%-kal csökkentették volna az árát.

b) Határozza meg p értékét, valamint az ing eredeti árát!

6. a) Számítsa ki az ábrán látható, két görbe vonal által közrefogott síkidom területét!
(Az egyik határoló vonal az $y = \sin x + 2$, a másik pedig az $y = \cos x + 2$ egyenletű görbének egy része.)



b) Igazolja, hogy ha $a_n = \dfrac{11n-5}{3n-8}$, akkor az $\{a_n\}$ sorozat nem monoton, de korlátos! ($n \in \mathbf{N}^+$)

7. a) Határozza meg, hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amelynek számjegyei között nem szerepel a 0, de szerepel legalább egyszer az 1.

Egy pozitív egész számokból álló adatsokaság módusza 32, átlaga 22, a legkisebb adat a 10. Az m medián eleme a sokaságnak és gyakorisága 1.
Ha az m-et (m + 10)-re cserélnénk, akkor az így kapott új sokaság átlaga 24 lenne. Ha az eredeti sokaságban az m számot (m – 5)-re cserélnénk, akkor az így kapott sokaság mediánja m – 4 lenne.

b) Igazolja, hogy az adatsokaságnak öt eleme van!

c) Határozza meg az eredeti adatsokaság elemeit!

8. Az *ABCDEFGH* téglatest *ABCD* lapjára merőleges élei *AE*, *BF*, *CG* és *DH.* A téglatest három élének hossza: *AB* = 12 cm, *AD* = 16 cm és *AE* = 5 cm.

a) Számítsa ki az *ACFH* tetraéder térfogatát!

b) Igazolja, hogy az *ACFH* tetraéder oldallapjai egybevágó háromszögek!

c) Igazolja, hogy az *ACFH* tetraéder oldallapjai hegyesszögű háromszögek!

A *PQRS* tetraéder *QP* élének hossza 10 cm, *PS* éle 15 cm, *SR* éle pedig 40 cm hosszú. A másik három él hossza 20 cm, 25 cm és 30 cm.

d) Hány különböző tetraéder felel meg a feltételeknek? (Az egybevágó tetraédereket nem tekintjük különbözőknek.)

9. Egy társasjátékban egy hosszú egyenes pályán haladunk a bábunkkal. A Start mezőről indulunk; a szabályos dobókockával dobott pontszámunknak megfelelően léphetünk 1-et, 2-t, 3-at, 4-et, 5-öt vagy 6-ot. Ha a játék során bármikor a 4-es mezőre érkezünk, vissza kell állnunk a Start mezőre, és újra kell kezdenünk a játékot. Ebben a társasjátékban csak a 4-es mezőre érkezés miatt lehet a pályán „visszafelé” haladni.

Start	1	2	3	**4**	5	6	7	…

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egyszer a 4-es mezőre érkezünk?

András eddig háromszor dobott, és a negyedik dobása előtt éppen a Start mezőn áll.

b) Hányféle lehetett az András első három dobásából álló dobássorozat?

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b	7c	8a	8b	8c	8d	9a	9b
6	7	4	7	7	6	6	8	5	11	8	8	6	2	8	4	3	5	4	9	7