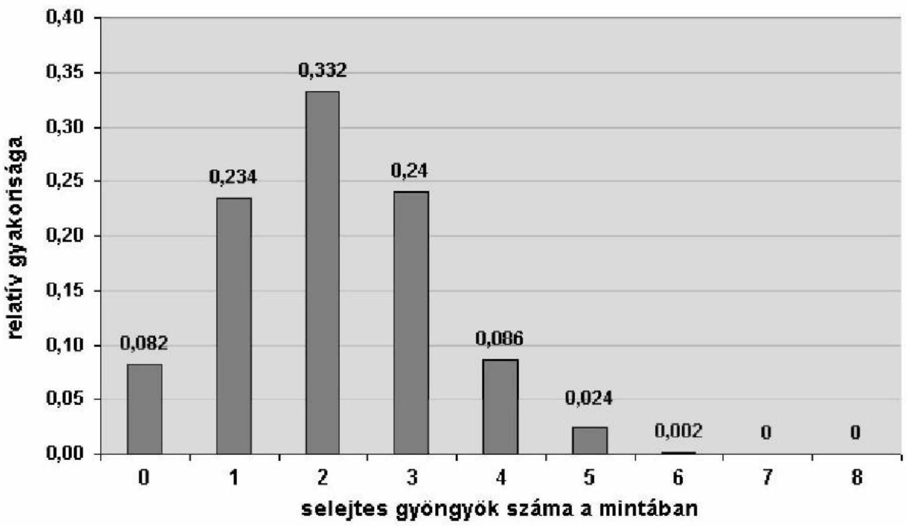
I.

1. Adott a $4x^2 + 4y^2 = 90$ egyenletű k kör és az $x + 3y = 0$ egyenletű g egyenes.
Írja fel a k kör g-vel párhuzamos érintőinek egyenletét!

2. Egy dobozban 40 üveggyöngy között 8 selejtes van. Egy kísérlet abból áll, hogy a 40 gyöngy közül **visszatevés nélküli mintavétellel**, véletlenszerűen kiválasztanak 10-et, és megszámolják, hogy hány selejtes van közöttük.

a) Egy tanulócsoport tagjai összesen 500 alkalommal végezték el a fent leírt kísérletet. A kísérletek befejezése után összesítették a tapasztaltakat: a 10 elemű mintákban előforduló selejtes gyöngyök számának relatív gyakoriságát oszlopdiagramon ábrázolták. A diagram segítségével válaszoljon a következő kérdésekre:
I. Mennyi volt az egy mintában előforduló legtöbb selejtes gyöngy?
II. Mennyi volt az egy mintában legtöbbször előforduló selejtszám?
III. Hány alkalommal nem volt a 10 elemű mintában egyetlen selejtes gyöngy sem?



b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kísérletet egyszer elvégezve a mintában pontosan 2 selejtes lesz! Állapítsa meg, hogy az eseménynek az 500 kísérletből kapott relatív gyakorisága hány százaléka a kiszámított valószínűségnek!

c) Egy másik kísérletben ugyanebből a 40 gyöngyből **visszatevéses** mintavétellel választunk ki 10 gyöngyöt. Ekkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában pontosan 2 selejtes gyöngy lesz?

3. Egy hegy és a tetején álló kilátótorony magasságát szeretnénk meghatározni. Legyen a kilátótorony legmagasabban lévő pontja A, a kilátó talppontja B. A hegy lábánál elterülő vízszintes, sík mezőn a toronytól ugyanabban az irányban felvesszük az egymástól 30 méterre lévő P és Q pontokat úgy, hogy az A, B, P és Q pontok ugyanabban a (függőleges) síkban legyenek. A P pontból a torony alját (a B pontot) 29°-os, a tetejét (az A pontot) 33°-os, a Q pontból a torony alját 27°-os emelkedési szög alatt látjuk.

a) Hány méterrel emelkedik a mező fölé a hegy, amelynek tetején a kilátó áll?

b) Milyen magas a kilátó?

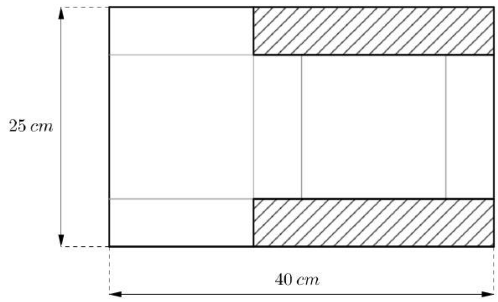
Válaszait egész méterre kerekítve adja meg!

4. Jelölje a $4x^2 - 19x + 22 < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát A, a $\sin 2x < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát pedig B.
Igazolja, hogy $A \subset B$!

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy 40 cm × 25 cm-es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt élek mentén) egy olyan téglatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő.



a) Mekkora lesz a kapott téglatest felszíne, ha a kivágott téglalapok rövidebb oldala 2 cm-es?

b) Hogyan válasszuk meg a kivágott téglalapok rövidebb oldalának hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az elkészített téglatest térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

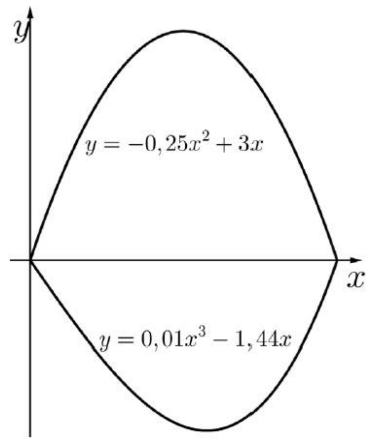
6. a) Egy 9 pontú fagráfban ismerjük 8 pont fokszámát: 1; 1; 1; 1; 2; 3; 3, 3. Határozza meg a kilencedik pont fokszámát!

b) Van-e olyan 9 pontú egyszerű gráf, amelyben mind a 9 pontnak más a fokszáma?

c) Egy kilenctagú társaságban kézfogással köszöntik egymást az emberek. Eddig 4 kézfogás történt. Hány különböző módon történhetett ez meg, ha senki sem fogott kezet egynél többször, és a kézfogások sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

7. Egy iskola egyéni sakkbajnokságának döntőjében minden versenyző egyszer játszott a többi döntőbe jutott versenyzővel. A verseny végén kiderült, hogy a versenyzők elért pontszámai egy szigorúan növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai.
Hányan versenyeztek a döntőben és hány pontja volt a győztesnek, ha az utolsó helyezett összesen 1 pontot szerzett?
(A sakkversenyen győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont jár.)

8. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y = -0{,}25x^2 + 3x$, illetve az $y = 0{,}01x^3 - 1{,}44x$ egyenletű görbéknek az az íve, amelyre $0 \le x \le 12$. (Ez a két ív az ábrán is látható.)
Tudjuk, hogy a (0; 0) és a (12; 0) pont a két ív közös pontja.



a) Mindkét ív esetében adja meg az ív x tengelytől legtávolabbi pontjának első koordinátáját!

b) Mekkora a két ív által közrezárt síkidom területe?

c) Értelmezzük a] 0; 12 [intervallumon az alábbi hozzárendeléssel megadott f és g függvényeket:

$$f(x) = \frac{-0{,}25x^2 + 3x}{0{,}01x^3 - 1{,}44x} \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{25}{x+12}$$

Igazolja, hogy $f(x) = g(x)$, és mutassa meg, hogy a g függvény szigorúan monoton növekvő!

9. Egy osztály tanulói matematikadolgozatot írtak, melynek során három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot összesen 22-en oldották meg, közülük a második feladatot is megoldotta 16 tanuló. Azok, akik mindhárom feladatot megoldották, háromszor annyian voltak, mint akiknek csak az első feladat sikerült. Azok, akik csak az első két feladatot tudták megoldani, két és félszer annyian voltak, mint akik csak az elsőt és a harmadikat.

a) Hány tanuló oldotta meg mindhárom feladatot?

Összesen 30-an írták meg a dolgozatot. A dolgozatokat a tanár 1-től 5-ig terjedő egész osztályzatokkal értékelte. Az osztályzatok átlaga 3,4, mediánja 3,5, egyetlen módusza 4 volt. Amikor a tanár kiosztotta a dolgozatokat, a dolgozatírók közül hatan hiányoztak. A 24 kiosztott dolgozat között 7 db ötös, 5 db négyes, 6 db hármas, 4 db kettes és 2 db egyes volt.

b) Hányas lehetett a hat hiányzó tanuló dolgozata?

Pontszámok:

1	2a	2b	2c	3a	3b	4	5a	5b	6a	6b	6c	7	8a	8b	8c	9a	9b
12	4	5	4	8	5	13	4	12	5	5	6	16	5	5	6	7	9