I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x - \cos^2 x = -1$

b) $\left| x - |x| \right| = 2x + 1$

2. Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16 : 9-es típus” azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos” jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban (1 col ≈ 2,54 cm).

a) Számítsa ki a 40 colos, 16 : 9-es képernyő oldalainak hosszát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) Két 16 : 9-es képernyő közül az elsőnek 69%-kal nagyobb a területe, mint a másodiknak. Hány százalékkal nagyobb az első képernyő átlója, mint a másodiké?

3. Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintra kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt.

a) Számítsa ki a kerekített bevételek szórását!

A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10 000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18 000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor akciós időszak van, akkor a „rendes” eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

b) Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége (vagyis az „árnyereség”) a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el?

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor egy rögzített állvány egyenes rúdjára mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el (minden zakót külön vállfára akasztva, egymás mellett). A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek.

c) Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól?

4. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16; 10)$, $B(2; 4)$, $C(10; 2)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő belső szögét!

A K pont egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től.

b) Határozza meg a K pont koordinátáit!

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Adott az f és g függvény:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ f(x) = 2x + 1;$

$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ g(x) = x^2 - 2\ .$

a) Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit!

b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet!

c) Számítással igazolja, hogy a $h :]-\infty; -0{,}5[\to \mathbf{R};\ h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

6. Szétgurult 20 darab tojás az asztalon. Közülük 16 tojás ép maradt, de 4 tojásnak alig észrevehetően megrepedt a héja. Bori ezt nem vette észre, így visszarakosgatja a tojásokat a két tojástartóba. Először a sárga tartóba tesz tízet, majd a fehérbe a többit.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás ugyanabba a tartóba kerül?

Csenge sokszor vásárol tojásokat a sarki üzletben. Megfigyelése szerint a tojások közül átlagosan minden ötvenedik törött. (Ezt úgy tekintjük, hogy a tojások mindegyike 0,02 valószínűséggel törött.)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 10 tojást tartalmazó dobozban egynél több törött tojást talál Csenge?

Egy csomagolóüzembe két termelő szállít tojásokat: az összes tojás 60%-a származik az *A*, 40%-a a *B* termelőtől. Az *A* termelő árujának 60%-a első osztályú, 40%-a másodosztályú, a *B* termelő árujának 30%-a első osztályú és 70%-a másodosztályú.
Az összes beszállított tojás közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt első osztályúnak találjuk.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az *A* termelő árujából való a kiválasztott tojás?

7. Egy pénzintézet a tőle felvett *H* forint összegű hitel visszafizetésekor havi *p*%-os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \dfrac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni).

A képletben $q = 1 + \dfrac{p}{100}$, az *n* pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?
Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértéket, ha $q = 1{,}02$ és $H = 2\,000\,000$.

8. a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz!

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig.
(Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni?
(Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha *a*, *b*, *c*, *d* pozitív számok, és $a + c = b + d$, akkor az *a*, *b*, *c*, *d* hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.)

9. a) Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé!

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza *p*, a másiké pedig *q* ($p > 0$, $q > 0$). (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne: $6 \cdot \sqrt[3]{\left(p^3 + q^3\right)^2}$.

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege!

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
6	7	6	5	6	4	3	6	8	3	7	6	5	5	6	4	8	4	6	3	7	6	2	8