

## I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$       b)  $\log_3 x + \log_9 x = 6$

2. a) Egy 16 pontú teljes gráf összes élét úgy színeztük ki pirossal vagy sárgával, hogy minden pontból pontosan három piros él induljon ki. A pontok közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

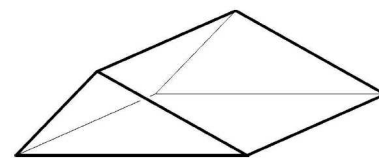
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott két pontot piros él köti össze?

b) Egy másik teljes gráfból 45 élt elhagyva egy fagráfot kaptunk.

Hány pontja van ennek a gráfnak?

(A teljes gráf olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontját él köti össze.)

3. A Tetőfedők Egyesülete a veterán tetőfedőknek egy kicsi, tömör, névre szóló bronzplasztikával kedveskedik. Az emléktárgy alaplapja egy 4 cm oldalú négyzet, melynek két szemközti éléhez egy-egy, az alaplap síkjára merőleges, egymással egybevágó háromszöglap csatlakozik az ábra szerint. A háromszöglapok két oldaléle 2 cm és 3 cm hosszú. Az emléktárgyhoz megrendelt téglatest alakú díszdoboz belső mérete  $4,1 \text{ cm} \times 4,1 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm}$ , az emléktárgy készítésére felhasznált bronz sűrűsége pedig  $8,2 \text{ kg/dm}^3$ .



Számítással igazolja, hogy a bronzplasztika belefér a dobozba és tömege nem haladja meg a 10 dkg-ot!

4. a) Egy hételemű, pozitív egész számokból álló adatsokaság hat eleme: 10; 2; 5; 2; 4; 2. A hetedik adatot nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a hét adat átlaga, módusza és mediánja (nem feltétlenül ebben a sorrendben) egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja.

Határozza meg a hetedik adat lehetséges értékeit!

b) A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű páros szám képezhető, melynek minden számjegye különböző?

## II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy cég egyik részlegében dolgozó férfiak átlagéletkora 44 év, az ott dolgozó nők átlagéletkora 40 év, a részleg összes dolgozójaé pedig 41,5 év.

a) Hányszorosa a férfiak száma a nők számának ebben a részlegben?

A cég egy másik részlegében a férfiak és a nők számának aránya 2 : 3. Egy átszervezés alkalmával innen 7 férfit és 9 nőt áthelyeztek. Így a részlegben maradó férfiak és nők számának aránya 1: 2-re változott.

b) Hány férfi és hány nő maradt ezen a részlegen?

c) Hányféleképpen lehet 6 nőből és 3 férfiből három munkacsoportot szervezni úgy, hogy mindegyik csoportba 2 nő és 1 férfi kerüljön? (A három munkacsoport sorrendjétől eltekintünk.)

6. a) Adott az  $O$  középpontú,  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 45$  egyenletű kör. Az  $y = 2$  egyenletű  $e$  egyenes és a kör első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük  $M$ -mel. Tükrözzük az  $e$  egyenest az  $OM$  egyenesre. Írja fel az  $e$  egyenes tükörképének egyenletét!

b) Adott az  $y = -x^2 + 2x + 5$  egyenletű parabola. Az  $y = 2$  egyenletű egyenes és a parabola első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük  $P$ -vel.

Számítsa ki a parabola  $P$  pontbeli érintőjének a meredekségét!

7. a) Határozza meg az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  függvényben az  $a$ ,  $b$  és  $c$  valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk a következőket:

(1)  $f(1) = f(-1) + 4$ ;

(2)  $f'(3) = 10$  ( $f'$  az  $f$  deriváltfüggvénye);

(3)  $\int_0^2 f(x) dx = -8$

**b)** Mutassa meg, hogy az  $x^3 - 3x^2 + x - 3$  polinom szorzattá alakítható, és ennek segítségével határozza meg a  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$  függvény zérushelyeit!

**8.** Az ulti nevű kártyajátékot magyar kártyával játsszák, melyben 4 szín (piros, tők, makk, zöld) és minden színben 8 lap (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász), összesen tehát 32 lap van.

Dénes, Elemér és Fanni ultiznak: egy osztásnál mindhárom játékos (véletlenszerű elosztással) 10-10 lapot kap, a maradék 2 lap pedig az úgynevezett talonba kerül.

**a)** Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy osztásnál a talonba kerülő két lap különböző színű!

**b)** Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy osztásnál Elemérhez kerül valamelyik színből mind a 8 lap!

**c)** Számítással igazolja, hogy (négy tizedesjegyre kerekítve) 0,7966 annak a valószínűsége, hogy az osztáskor Fanni kap legalább egy ászt!

**d)** Ha tudjuk, hogy az osztáskor Fanni kapott legalább egy ászt, akkor határozzuk meg annak a (feltételes) valószínűségét, hogy mind a négy ász hozzá került!

**9.** Egy játékban minden játékos ugyanakkora kezdő pontszámmal indult, amely érték a játék fordulói során növekedhetett vagy csökkenhetett. Rita és Péter jól játszottak, mert mindketten folyamatosan nyertek, így növekedett a pontszámuk. Érdekes módon Rita pontszáma fordulóról fordulóra ugyanannyiszorosára nőtt, és ez igaz volt Péterre is, bár Péter esetében nagyobb volt a növekedés mértéke. Az első forduló után Péternek 20-szal több pontja volt, mint Ritának, a második után már 70 ponttal vezetett Rita előtt, a harmadik forduló után pedig már 185 pont volt a különbség a javára. Mekkora volt a közös kezdő pontszám értéke?

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9
5	6	4	8	14	9	5	6	5	5	12	4	11	5	4	4	3	5	16