

I.

1. Egy háromszög a , b és c oldalairól tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned} c &= 2b; \\ a^2 + b^2 &= 4; \\ a^2 - b^2 &= 2. \end{aligned}$$

- a) Mekkora a háromszög oldalai?
 b) Mekkora a háromszög szögei?
 c) Mekkora a beírt körének sugara?

Az eredmények pontos értékét adja meg!

2. a) Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk, és a kapott számokat a dobás sorrendjében beírjuk a $\overline{8a567b}$ hatjegyű számban az a és a b helyére. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott hatjegyű szám minden számjegye különböző?

b) Megadunk négy halmazt:

Az A halmaz elemei a héttel osztható pozitív kétjegyű számok.

A B halmaz elemei a 29 kétjegyű pozitív többszörösei.

A C halmaz elemei mindazok a pozitív kétjegyű számok, amelyeknél a 11-gyel nagyobb szám négyzetszám.

A D halmaz elemei mindazok a pozitív kétjegyű számok, amelyeknél a 13-mal kisebb szám négyzetszám.

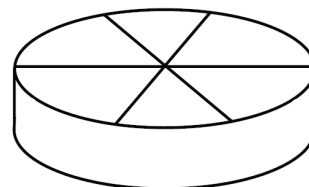
b1) Hány elemű az $A \cup C$ halmaz?

b2) Hány elemű a $B \cap D$ halmaz?

b3) Melyek azok a kétjegyű pozitív egészek, amelyek a fenti négy halmaz közül pontosan kettőnek az elemei?

3. Egy kerek dobozban piros, egy másik, ugyanilyen dobozban pedig kék címkéjű csomagolt sajtok vannak. A 6-6 egyforma méretű, egymástól nem megkülönböztethető sajt szelet teljesen kitölti az egyes dobozokat. A dobozok tartalmát kiöntjük az asztalra.

Hány különböző elrendezésben tehetünk vissza ebből a 12 darab sajtból 6 darabot az egyik dobozba címkéjükkel felfelé? (Két elrendezést különbözőnek tekintünk, ha azok forgatással nem vihetők egymásba.)



4. a) Adott az $a_n = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{7^5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{7^{2n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^+$ sorozat.

Melyik az a legnagyobb n természetes szám, amelyre $a_n > 49^{-50}$?

b) Adott a $b_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \dots + \frac{1}{7^{2n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^+$ sorozat.

Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ határértéket!

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. a) A derékszögű koordináta-rendszerben adott egy téglalap, amelynek csúcsai: $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 1)$ és $D(0; 1)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a téglalap egy belső $P(x; y)$ pontját.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy $y \leq \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$?

b) Marci a farsangi rendezvényre kibocsátott 200 darab tombolajegyből 4-et vásárolt. A tombolán 10 nyereménytárgyat sorsolnak ki. Minden tombolajeggyel legfeljebb egy tárgyat lehet nyerni.

b1) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Marci pontosan egy tárgyat nyer a tombolán?

b2) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Marci nyer a tombolán?

Az eredményeket – a közbülsőket is – négy tizedesjegyre kerekítve számolja ki!

6. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja a $T(4; 2)$ pont, és a $P(2; 0)$ pont is illeszkedik a grafikonra.

a) Számítsa ki az a , b , c együtthatók értékét!

b) Írja fel a grafikon 3 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenletét!

c) Számítsa ki az f grafikonja és az x tengely által határolt tartomány területét!

7. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$6 \cdot \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = \left(x^2\right)^{\log_3 x} - 6075$$

8. Egy cég három városban nyitott fiókot. A kőszegi fiókban dolgozók átlagéletkora 37 év, a tatai fiókban dolgozóké 23 év, a füredi fiókban dolgozóké pedig 41 év.

Három alkalommal szerveztek tanulmányutat a cégnél. Ezeken az utakon csak a cégnél dolgozók vettek részt, és mindenki elment azokra a tanulmányi utakra, amelyekre beosztották. Az egyes utakra a két-két kijelölt fiók minden munkatársát beosztották.

Az első utat a kőszegi és a tatai fiók munkatársainak szervezték. Ezen az úton a résztvevők átlagéletkora 29 év volt. A második úton – amelyen a kőszegi és a füredi fiókban dolgozók vettek részt – a résztvevők átlagéletkora 39,5 év volt. A harmadik tanulmányúton a tatai és a füredi fiók munkatársai vettek részt. Ezen az úton a résztvevők átlagéletkora 33 év volt.

Mennyi az átlagéletkora a cég összes dolgozójának?

9. Egy képzőművészeti galéria új kiállítótermet nyitott gyermekek számára. A terem alakja egy négyzet alapú egyenes gúla, melynek belső méretei: az alapél 12 méter, az oldalél 10 méter.

Az egyik kiállító művész azt kérte, hogy a kiállítás kivitelezője ragasszon az oldalfalakra körbe az alapélekkel párhuzamos keskeny színes csíkot (vonalat), amelyre majd a kiírásokat elhelyezik. A színes vonalak vízszintes, képzeletbeli síkja éppen felezte a kiállítóteret térfogatát.

a) Mekkora a színes vonalak összes hossza? Milyen magasan helyezkedik el a padló síkja felett a képzeletbeli felezősíki?

A kiállítás megnyitására a hangmérnök úgy helyezte el a terem legmagasabb pontjáról belógatott mikrofont, hogy az minden oldalfaltól és a padlótól is azonos távolságra legyen.

b) Milyen hosszú volt a belógató vezeték, ha a mikrofon és a rögzítés méretétől eltekintünk?

(Válaszait cm pontossággal adja meg!)

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3	4a	4b	5a	5b1	5b2	6a	6b	6c	7	8	9a	9b
4	5	4	4	8	12	10	4	5	5	6	6	5	5	16	16	9	7