

**I.**

1. Adott az  $f: [-2; 5] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 - 2x + 3$  függvény.
- a) Jellemezze a függvényt a következő szempontok szerint: növekedés, fogyás szélsőérték (helye és értéke)!
- b) A  $[-2; 5]$  intervallum mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a  $g(x) = \frac{1}{\lg(x^2 + 2x - 3) - \lg 5}$  kifejezés?
2. Egy egyetem mesterképzőjére jelentkező 29 hallgatónak nyilatkoznia kellett arról, van-e angol, német vagy francia nyelvvizsgájuk. Mindenki válaszolt – igennel vagy nemmel – mind a három kérdésre. A jelentkezők közül angol nyelvvizsgája 22, német 18, francia 18 hallgatónak van. 12 hallgatónak német és francia nyelvvizsgája is van, de közülük 3 főnek nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával rendelkezők közül 7-nek nincs német és 8-nak nincs francia nyelvvizsgája.
- a) Hány jelentkező válaszolt mindhárom kérdésre igennel?
- b) Hány jelentkező válaszolt mindhárom kérdésre nemmel?
3. Egy zöldség-gyümölcs kiskereskedő a nagybani piacon hétfőn 165 kg sárgabarackot, kedden 165 kg őszibarackot vásárolt. Egy rekesznyi őszibarack 2 kg-mal kisebb tömegű, mint egy rekesznyi sárgabarack, ezért 8 rekeszettel több volt az őszibarack, mint a sárga. Hány kilogramm sárgabarack volt egy-egy rekeszben, és hány rekeszettel vásárolt ebből hétfőn a kiskereskedő? (Hétfőn minden rekeszben ugyanannyi kg sárgabarack, kedden minden rekeszben ugyanannyi kg őszibarack volt.)
4. Egy  $ABCDE$  négyoldalú szabályos gúla alaplapja az  $ABCD$  négyzet. A gúlát elmetsszük az  $EAC$  síkkal. A síkmetszet területe  $64 \text{ cm}^2$ . Ha a gúlát az  $E$  csúcsától mért 4 cm távolságban, az alaplappal párhuzamos síkkal metsszük el, akkor  $32 \text{ cm}^2$  területű síkmetszetet kapunk.
- a) Mekkora a gúla magassága, és mekkora az alaplapjának területe?
- b) Számítsa ki a gúla alaplapjának és oldallapjának hajlásszögét!

**II.**

**Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!**

5. Vizsgáljuk azt a sorozatot, amelynek  $n$ -edik tagja adott  $\alpha \in \mathbf{R}$  esetén:  $a_n = n + \sin(n\alpha)$ .
- a) Legyen  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Írja fel a sorozat első három tagjának pontos értékét!
- b) Milyen  $\alpha \in [0; 2\pi]$  esetén lesznek az  $a_1, a_2, a_3$  számok – ebben a sorrendben – egy konstans sorozattól különböző számtani sorozat szomszédos tagjai?
- A megoldásában használhatja az alábbi azonosságokat is:
- $$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$
- $$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$
6. Egy urnában egy fehér, egy piros és egy kék golyó található. Egymás után ötször húzunk az urnából egy-egy golyót úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.
- a) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során kihúzott kék és piros golyók száma megegyezik?
- b) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során több kék golyót húzunk, mint pirosat?
7. Egy újfajta, enyhe lefolyású fertőző betegségben a nagyvárosok lakosságának 5%-a betegszik meg. A betegek 45%-a rendszeres dohányos, a betegségben nem szenvedőknek pedig csak 20%-a dohányzik rendszeresen.

- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy nagyváros száz véletlenszerűen kiválasztott lakosa között legalább két olyan ember van, aki az újfajta betegséget megkapta?  
(Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!)
- b) Számítsa ki, hogy a rendszeres dohányosoknak és a nem dohányosoknak hány százaléka szenved az új betegségben!  
(Válaszát egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)
8. Pali és Zoli közösen egy  $60\text{ m} \times 30\text{ m}$ -es, téglalap alakú telket vásárolt. A telket egymás között két olyan egybevágó derékszögű trapézra osztották fel, amelynek a rövidebb alapja  $20\text{ m}$ . Jelölje  $EF$  a közös határvonalszakaszt!
- a) Számítsa ki a közös  $EF$  határvonal hosszát!  
(Az eredményt méterben, egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)
- A közös határvonalon Palinak kellett volna kerítést építtetni, de nem volt erre a célra pénze. Ezért Zolinak a következő ajánlatot tette: átad neki a telkéből egy háromszög alakú részt, ha Zoli csináltatja meg a telkület elválasztó kerítést. Zoli szerette volna telkének  $20\text{ m}$ -es határát maximum  $8$  méterrel megnövelni, így elfogadta az ajánlatot, és az új közös határvonalnak az  $EG$  szakaszt jelölte meg. A telek négyzetméterének ára  $30\,000\text{ Ft}$ , a kerítés megépíttetésének költsége  $15\,000\text{ Ft/m}$ . Az egyéb felmerülő költségeket egyenlő arányban osztották meg.
- b) Legalább hány  $\text{m}$  hosszú legyen a  $FG$  szakasz, hogy Zoli járjon jobban?  
(Az eredményt egy tizedesre kerekítve adja meg!)
9. Egy játéküzemben fa elemekből álló építőkészletet gyártanak. Ha  $x$  darab készletet gyártanak naponta, akkor a teljes gyártási költség  $k(x) = \frac{x^{1.5}}{5} + 12x + 300$  euró. Egy készletet  $18$  euróért tudnak értékesíteni.
- a) Naponta hány készletet gyártson az üzem, hogy a haszon a lehető legnagyobb legyen? Mennyi ez a maximális haszon?
- b) Az építőkészlet egyik darabját úgy készítik, hogy egy  $3\text{ cm}$  élhosszúságú kockának mind a nyolc „csúcsát” levágják egy-egy sík mentén úgy, hogy a fűrész a csúcsba futó mindhárom élt a csúcstól  $1\text{ cm}$  távolságban vágja el. Az így kapott test térfogata hány százaléka az eredeti kocka térfogatának?  
A választ egész számra kerekítve adja meg!  
(A fűrészeléskor keletkező anyagvesztés elhanyagolható, számításaiban nem kell figyelembe vennie!)

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b	8a	8b	9a	9b
7	7	3	9	12	10	3	3	13	8	8	7	9	4	12	9	7