

## I.

1. a) Oldja meg a pozitív valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\left. \begin{array}{l} \log_2(xy^3) = 1 \\ \log_2(x^2y) = -3 \end{array} \right\}$$

b) Határozza meg az összes olyan pozitív egész  $k$  számot, amelyre a  $\log_{3^k} 729$  kifejezés értéke pozitív egész szám!

2. a) Igazolja, hogy az  $A(0; 1)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(3; 6)$  és  $D(-5; 4)$  pontokkal megadott négyszög trapéz!

b) Kati megrajzolt egy olyan egyszerű teljes gráfot, amelynek 253 éle van, és csúcsai között szerepelnek a trapéz  $A$ ;  $B$ ;  $C$ ;  $D$  csúcsai is. Hány új gráfcsúcsot kellett ehhez felvennie?

Legfeljebb hány éle törölhető ki ennek a teljes gráfnak, hogy még összefüggő maradjon?

3. Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát.

Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára *annyiszor 400 Ft-tal* csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

a) Adja meg annak a  $B$  függvénynek az  $x \mapsto B(x)$  hozzárendelési utasítását, amelynél  $x$  az utasok számát,  $B(x)$  pedig a társaság bevételeit jelöli  $x$  utassal indított járat esetén! Mi a  $B$  függvény értelmezési tartománya?

b) Hány utas esetén lesz a repülőársaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

4. Felmérések szerint az internetes kapcsolattal rendelkezők 17%-a vásárol az interneten, 33%-a tölt le szoftvert az internetről. A statisztika szerint az internetezők 14%-a mindkét szolgáltatást igénybe veszi. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten.

b) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy vásárol az interneten, vagy szoftvert tölt le. (Megengedve, hogy esetleg mindkét szolgáltatást igénybe veszi.)

c) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten és szoftvert sem tölt le az internetről.

d) Három véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy közül egyik sem vásárol az interneten. (A kiválasztást visszatevéses módszerrel végzik el.)

## II.

**Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!**

5. Egy iskola tanulóinak tanév végi létszáma az egyik tanévben 400-nál több volt, de nem érte el a 430-at. A tanév végén kiszámították, hogy a fiúk tanulmányi eredményének átlaga 4,01, a lányoké 4,21, míg az iskola összes tanulójaé 4,12. (Ezen három átlag mindegyike pontos érték.) Hányan jártak az iskolába az adott tanév végén?

6. Vízszintes terepen egy 6 méter mély, lefelé keskenyedő, négyszöglapok által határolt gödröt ástak. A gödör alja is vízszintes. A gödör nyílása egy  $8 \times 8$  m-es négyzet, két szemközti lapja függőleges, a másik kettő pedig  $75^\circ$ , illetve  $60^\circ$ -os szöveget zár be a földfelszín síkjával. (E két szemközti „ferde” lap síkjai  $45^\circ$ -os szöveget zárnak be egymással.)

a) Rajzolja le a gödör azon síkmetszetét, amely merőleges a ferde lapokra (és így a földfelszínre is)! A rajzon tüntesse fel az adatokat!

- b)** Hány  $m^3$  földet kellett kiásni a gödör elkészítéséhez? Az eredményt  $m^3$  pontossággal adja meg!
- 7.** A 12.A osztály öt belépőjegyet kapott a vízilabda bajnokság döntőjére. Az osztály mind a harminc tanulója szívesen menne, bár közülük 12 tanulónak akkor különórája lenne. A választást a véletlenre bízzák: felírják a 30 nevet egy-egy cédulára, és ötöt kihúznak közülük.
- a)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kisorsolt tanulók közül pontosan 2 olyan lesz, akinek különórája lenne? Az eredményt tizedestört alakban adja meg!
- b)** Tudjuk, hogy a kiválasztott öt tanuló között biztosan van olyan, akinek van különórája. Mennyi ekkor a valószínűsége annak, hogy pontosan két kisorsolt tanulónak van különórája?
- A döntő után az öt tanuló a következőképpen számolt be a mérkőzésről:
- A: A vesztes csapat 4-nél több gólt dobott.  
 B: A győztes csapat 3-mal többször talált a kapuba, mint a vesztes.  
 C: Összesen 10-nél több, de 28-nál kevesebb gól született a mérkőzésen.  
 D: A két csapat együttesen dobott góljainak a száma prímszám.  
 E: A vesztes csapat is prímszámú gólt dobott.
- c)** Tudjuk, hogy mind az öt tanuló igazat mondott. Megállapítható-e ezek alapján egyértelműen, hogy mi lett a döntő végeredménye?
- 8.** Az  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  és  $\{c_n\}$  egész számokból álló mértani sorozatok. Az egyes sorozatok hányadosai és bizonyos tagjai között a következő összefüggések érvényesek:
- (1)  $a_1$ ,  $b_1$  és  $c_1$  ebben a sorrendben egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek 2 a hányadosa (kvóciense);
- (2) az  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  és  $\{c_n\}$  sorozatok hányadosai ebben a sorrendben egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek 1 a különbsége (differenciája);
- (3)  $a_2 + b_2 + c_2 = 24$  ;
- (4)  $c_1 + c_2 + c_3 = 84$ .
- Adja meg mindhárom eredeti mértani sorozat első három tagját!
- 9.** Jelölje az  $y = x^2 - 4x - 12$  egyenletű parabola tengelypontját  $C$ , az  $x$  tengellyel alkotott metszéspontjait pedig  $A$  és  $B$ .
- a)** Számítsa ki az  $ABC$  háromszög beírt körének sugarát!
- b)** Az  $ABC$  háromszög területe hányad része a parabola és az  $x$  tengely által közrefogott zárt síkidom területének?

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5	6a	6b	7a	7b	7c	8	9a	9b
7	5	4	8	6	7	3	4	3	4	16	4	12	4	7	5	16	8	8