

I.

1. Legyen a_1, a_2, \dots, a_{21} egy számtani sorozat első huszonegy tagja. Közülük a páratlan sorszámúak összege 15-tel nagyobb, mint a páros sorszámúak összege. Tudjuk továbbá, hogy $a_{20} = 3a_9$. Határozza meg az a_{15} értékét!
2. Egy nemzetközi matematikai felmérésben egy magyarországi középiskola 9 – 12. évfolyamából 100 diák vett részt. Minden diák ugyanazt a feladatlapot kapta, és a feladatlapon található feladatok teljes megoldásával maximálisan 150 pontot érhetett el. Az összes diák által elért pontszámok átlaga 100 pont volt. Másfélszer annyi 9 – 10. évfolyamos tanuló írta meg a felmérést, mint 11 – 12. évfolyamos tanuló, viszont a 11 – 12. évfolyamos tanulók átlagpontszáma másfélszer akkora volt, mint a 9 – 10. évfolyamos tanulóké.
- a) Számítsa ki a 11 – 12. évfolyamos tanulók átlagpontszámát!
- A felmérést végző kutatóintézet kíváncsi volt a tanulók véleményére a feladatok nehézségét illetően. A 100 tanuló közül véletlenszerűen választottak ki hármat, akiknek egy kérdőív kérdéseire kellett válaszolniuk.
- b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 9 – 10. évfolyamról 2 tanulót, a 11 – 12. évfolyamról 1 tanulót választottak ki?
3. Határozza meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a $4 \cdot x^2 - 4(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot x + 1 + \sin \alpha = 0$ egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke legyen!
4. Egy egyetem három karán összesen 10500 hallgató tanul. Diákrektort választanak. A jelöltek: Alkimista, Bagoly és Flótás. A választáson a hallgatók 76%-a vett részt. A szavazatok 90%-ának összesítése után a következő eredményekről tudósított a kollégium rádiója: Alkimista szavazatának száma 2014, Bagolyé 2229 és Flótásé 2805.
- a) Az eddig feldolgozott szavazatoknak hány százaléka volt érvénytelen? (A választ egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)
- b) Vázolja kördiagrammon az eddig feldolgozott szavazatok százalékos megoszlását! Tüntesse fel az egyes tartományokhoz tartozó középponti szögek nagyságát fokban mérve! (A megfelelő százalékokat és szögeket egész pontossággal adja meg!)
- c) Megnyerheti-e Alkimista a választást? (A választást az nyeri, aki a legtöbb szavazatot kapja.)
- d) 95%-os feldolgozottságnál legalább hány százalékkal vezessen Flótás az utána következő jelölt előtt, hogy már matematikailag is biztos lehessen a győzelemben? (A megfelelő legkisebb százalékot egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

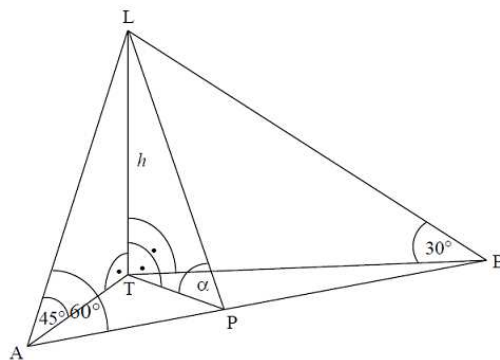
5. András és Béla egy magaslati edzőtáborban minden reggel 10 km-t fut: 5 km-t hegynek felfelé a hegycsúcsig, majd megállás nélkül 5 km-t ugyanazon az úton vissza a táborig. Egyik nap András reggel 10 perccel hamarabb indult Bélánál, és felfelé 15 km/h, lefelé 20 km/h sebességgel futott. Béla sebessége ezen a reggelen felfelé 16 km/h, lefelé 22 km/h volt.
- a) Futás közben a hegycsúcstól milyen távol találkoztak egymással ezen a reggelen?
- Az edzőtáborba összesen 10 lány és 9 fiú érkezett meg. Az első foglalkozáson az edző mindenkit megkérdezett, hogy hány társát ismerte korábbról a csoportból. (Az ismeretség kölcsönös.) Tudjuk, hogy korábbról mindegyik fiú pontosan ugyanannyi lányt ismert, viszont a lányok mindannyian különböző számú fiút ismertek.
- b) Lehet-e, hogy minden fiú 6 lányt ismert korábbról a tábor kezdetekor?
6. Egy tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz alapjainak hossza 5, illetve 20 egység.
- a) Számítsa ki a trapéz területét és átlójának hosszát!

b) Számítsa ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy a trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja körül.

c) Bizonyítsa be általánosan a következő állítást:

Ha egy húrtrapéz érintőnégszög, akkor magasságának hossza az alapok hosszának mértani közepe.

7. A tengerparton néhány perccel 12 óra előtt felbocsátottak egy meteorológiai léggömböt, ami a tenger felé sodródva emelkedett. A léggömbön a magasságmérő 842 métert jelzett, amikor Aladár és Béla a tengerparton szögmérő műszerekkel bemérte a léggömb helyzetét pontban 12 órakor. Aladár azt állapította meg, hogy a léggömb 45° -os emelkedési szögben (a vízszintes síkkal bezárt szög) látszik, a léggömb és Béla helyét összekötő szakasz látószöge pedig 60° -os. Béla a léggömböt 30° -os emelkedési szögben látta.



a) Milyen messze volt egymástól a két szögmérő műszer?

b) Az Aladár és Béla helyét összekötő szakaszon lévő pontok közül a P pontból láthatták volna maximális emelkedési szögben a léggömböt 12 órakor. Igazolja, hogy P az ABT háromszög T -re illeszkedő magasságának talppontja!

c) Milyen magasan volt a léggömb 12 óra 30 perckor, amikor a léggömbön lévő légnyomásmérő műszer a tengerszinten lévő légnyomás 80%-át mutatta?

A légnyomás a tengerszint feletti magasság függvényében a $p(h) = p_0 \cdot e^{C \cdot h}$ képlet alapján számolható, ahol h a méterben mért tengerszint feletti magasságot, p_0 a tengerszinten lévő légnyomást (ezt tekinthetjük 10^5 Pascalnak), e a természetes logaritmus alapszámát ($e \approx 2,718$), C egy tapasztalati

konstanst jelent. $\left(C = -\frac{1}{7992} \right)$

8. A könyvkiadó szerkesztője egy könyv nyomtatási formáját tervezi. Minden lap alsó, felső és külső szélén kettő centiméteres margót szeretne hagyni, a belső szélén a kötés miatt négy centiméterest. A teljes lap területe 600 cm^2 .

a) Mekkora legyenek a lap méretei, ha a szerkesztő a lehető legnagyobb nyomtatási területet szeretné elérni a lapokon?

b) A nyomtatott oldalak száma 120, és a nyomtatott oldalak számozása 3-mal kezdődik.

Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy nyomtatott oldalt, mekkora valószínűséggel lesz az oldalszámban 2-es számjegy?

9. Egy egyetem természettudományi karának tanévzáró ünnepségén 6 doktorandusz hallgató, valamint egy biológia professzor, egy fizika professzor és egy matematika professzor kapott díjat kimagasló kutatói tevékenységéért. Számukra az első sorban helyeztek el 9 széket. Az ünnepségre a professzorok együtt érkeztek, megelőzve a hallgatókat.

a) Hányféleképpen foglalhatnának helyet a professzorok a 9 üres széken, ha nem várnák meg a hallgatókat?

A professzorok azonban megvárták a hallgatókat. Mikor a hallgatók mindegyike megérkezett az ünnepségre, a professzorok azt kérték, hogy mindegyikük két hallgató között ülhessen. A hallgatók örömmel tettek eleget a kérésnek.

b) Hányféleképpen ülhetett le így a 9 díjazott?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a biológia professzor másodikként veheti át a díjat úgy, hogy közvetlenül előtte is, utána is doktorandusz hallgatót szólítanak a díj átvételére, és az ünnepségen a díjak átadásánál minden egyes sorrend egyenlő valószínűséggel valósul meg?

Pontszámok:

1	2a	2b	3	4a	4b	4c	4d	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b	9c
12	7	5	13	3	4	3	4	10	6	5	5	6	8	5	3	12	4	4	6	6