

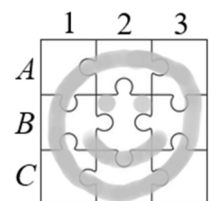
## I.

1. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.
- Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!
- Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.
- Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya 3 : 4 : 5.
  - Ennek a derékszögű háromszögnek a területe  $121,5 \text{ cm}^2$ . Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!
2. a) Határozza meg  $\frac{x}{y}$  értékét, ha  $\frac{2x+3y}{4x+2y} = \frac{9}{10}$  ( $y \neq 0$ ;  $y \neq -2x$ )
- b) Legyen  $f(x) = x^2 - 11x + 30$ .  
Igazolja, hogy ha  $f(x) \neq 0$ , akkor  $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x-4}{x-6}$
- c) Oldja meg az  $\frac{x-4}{x-6} \leq -1$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
3. Ágoston a tanév első két hónapjában három osztályzatot szerzett matematikából (osztályzatok: 1, 2, 3, 4 vagy 5). A második osztályzata nem volt rosszabb, mint az első, a harmadik osztályzata pedig nem volt rosszabb, mint a második.
- Határozza meg a feltételeknek megfelelő lehetőségek (számhármások) számát!  
Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson.
  - Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat!
4. Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7.
- Határozza meg a hét számot!  
A 72-nek és az  $n$  pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27 720.
  - Határozza meg az  $n$  lehetséges értékeinek számát, és adja meg az  $n$  legkisebb lehetséges értékét!

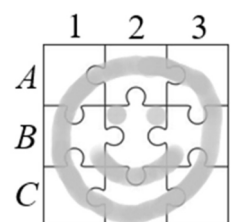
## II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Az ábrán egy  $3 \times 3$ -as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ( $A_1, A_2, \dots, C_3$ ) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képen.



- Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a foksámok összegét!
- Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!
- A teljesen kirakott képen jelölje meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!
- Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képen kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül



kapcsolódják legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)?  
(Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

6. Adott az  $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$  egyenletű  $k$  kör.
- Igazolja, hogy az  $E(-7; 5)$  pont rajta van a  $k$  körön!
  - Írja fel a  $k$  kör  $E$  pontjában húzható érintőjének egyenletét!
  - Határozza meg az  $m$  valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az  $y = mx$  egyenletű  $e$  egyenesnek és a  $k$  körnek ne legyen közös pontja!
7. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

- Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette!

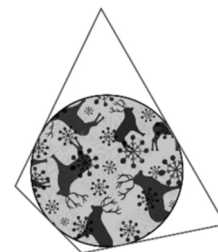
A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a.

Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

- Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyyszög alakú függődisz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.

- Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza?



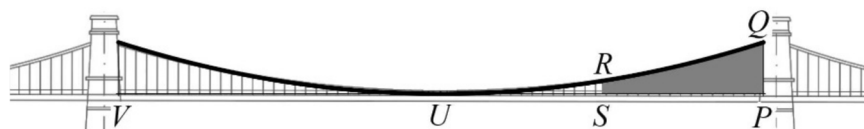
8. a) Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!

Van olyan  $G_1$ , illetve  $G_2$  fagráf, amelyre igaz, hogy a  $G_2$  csúcsainak száma kétszerese a  $G_1$  csúcsai számának, és a  $G_2$  éleinek száma is kétszerese a  $G_1$  élei számának. (A fagráfnek van legalább egy csúcsa.)

Az  $A, B, C, D, E, F$  kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.

- Mekkora annak a valószínűsége, hogy az  $A$  vagy a  $B$  cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.



A híd két támpillérének  $PV$  távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a  $PV$  felezőpontja ( $U$ ), a tengelye pedig a  $PV$  felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága  $PQ = 16$  méter, a vászon tervezett szélessége  $PS = 50$  méter. A tervek szerint a  $QR$  íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített  $PQRS$  területet fedi majd be ( $RS$  merőleges  $PS$ -re).

- Hány  $m^2$  területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező?

9. Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti. Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket.

Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt”, azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságozzák a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).

A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.

A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

- a)** A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?
- b)** Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b
5	5	3	3	5	5	5	7	7	6	3	4	2	7	2	5	9	6	3	7	3	6	7	6	10