

## I.

1. a) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol  $x$  és  $y$  pozitív valós számok!

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0,2 \\ \frac{\lg x + \lg y}{2} = \lg \frac{x + y}{2} \end{array} \right\}$$

b) Oldja meg a  $[-\pi; \pi]$  halmazon a  $2\sin^2 x - \cos x = 2$  egyenletet!

2. Két várost egy 195 km hosszú vasútvonal köt össze. Ezen a vonalon személyvonattal is és gyorsvonattal is el lehet jutni egyik városból a másikba. A személyvonat átlagsebessége 18 km/h-val kisebb a gyorsvonaténál, menetideje így 45 perccel több.

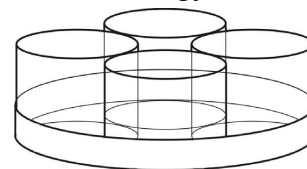
a) Határozza meg a vonatok átlagsebességét!

Az egyik hét munkanapjain utasszámlálást végeztek a személyvonaton. Hétfőn 200, kedden 160, szerdán 90, csütörtökön 150 utast jegyeztek fel.

b) Hány utas volt pénteken, ha tudjuk, hogy az öt adat átlaga is szerepel az adatok között, továbbá az adatok (egyetlen) módusza nem egyenlő a mediánjukkal?

3. a) Az  $ABCD$  négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan  $P$  pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy  $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$ .

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcat is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

c) Igaz-e, hogy a pohárba befér 5 dl üdítő?

4. Az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 12x + 27$  függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az  $x$  tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

b) Írja fel a parabolához az  $E(5; -8)$  pontjában húzott érintő egyenletét!

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

## II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. a) Határozza meg a  $c$  számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy  $\overline{1c28}$  nem osztható 6-tal,  $\overline{93c6}$  nem osztható 36-tal,  $\overline{c3c5}$  pedig nem osztható 15-tel! ( $\overline{pqrs}$  azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye  $p$ , további számjegyei pedig rendre  $q$ ,  $r$  és  $s$ .)

b) Igazolja, hogy nincs olyan  $n$  pozitív egész szám, amelyre  $4^n + 6n - 1$  osztható 8-cal!

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy  $4^n + 6n - 1$  minden  $n$  pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!

6. Egy fémlémezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el.

a) Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, **felül nyitott** hordó elkészítéséhez, ha a gyártása során 12%-nyi hulladék keletkezik?

Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemez hordókat.

b) Mekkora annak a 200 liter térfogatú, **felül nyitott** forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne?

7. Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé” válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában  $4 + 3 = 7$  új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.)

a) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanak a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

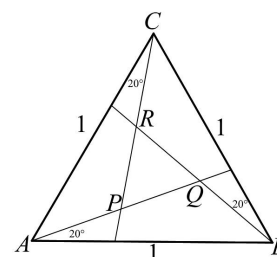
A biológiaórán egy kezdetben tízmillió baktériumhalmaznak a környezethez való alkalmazkodását modellezzik a tanulók. Egy szabályos dobókockával dobnak, és ha a dobás eredménye 1, 2 vagy 3, akkor egymillió baktérium elpusztul. Ha a dobás eredménye 4 vagy 5, akkor nem történik semmi. Ha a dobás eredménye 6, akkor újabb egymillió baktérium keletkezik. A dobást többször egymás után megismétlik.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy hét dobás után a baktériumok száma legfeljebb ötmillió lesz!

8. a) Ha egy háromszög szabályos, akkor a körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával.

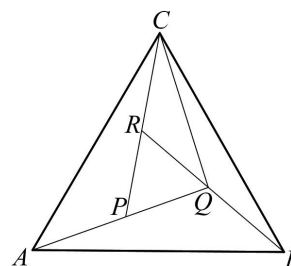
Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és igazolja, hogy a megfordított állítás is igaz!

Az egységnyi oldalú  $ABC$  szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható  $PQR$  szabályos háromszöget kaptuk.



b) Számítsa ki a  $PQR$  háromszög oldalának hosszát!

A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható  $ABQ$ ,  $BCQ$ ,  $CQR$ ,  $ACP$  és  $PQR$  háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.)



c) Összesen hány különböző színezés lehetséges?

9. Egy pár kesztyű árát először  $p$  százalékkal csökkentették, majd a csökkentett ár  $p + 4,5$  százalékkal tovább mérsékeltek. A kétszeri árcsökkentés után a kesztyű 18,6%-kal olcsóbb lett, mint az árcsökkentések előtt volt.

a) Határozza meg a két árcsökkentés százalékos értékét!

Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.)

A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk.

b) Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét!

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	8a	8b	8c	9a	9b
6	6	7	5	4	5	4	5	5	4	7	2	7	6	10	8	8	4	7	5	8	8