I.

1. Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén összefüggő olajfolt keletkezett. A szakemberek műholdak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt.

a) Ha az első megfigyeléskor 400 m^2 volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva?

A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a 12 400 m^2 területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m^2-ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe 12 270 m^2 lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.

b) Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a 12 400 m^2-es olajfolt teljes eltávolítása?

2. A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.

a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz!

A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya 2 , a területe pedig éppen 1 m^2.

b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve!

Ha az A0-s papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Ha az A1-es papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A2-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os”. A „80 g-os” jelzés azt jelenti, hogy 1 m^2 területű másolópapír tömege 80 gramm.

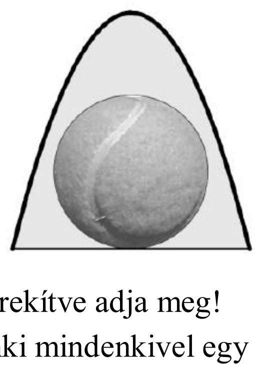
c) Egy csomagban 500 darab A4-es, „80 g-os” papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g?

3. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 2x = 12 - y \\ 2\sqrt{x} = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y-3}{4} = 3 \\ \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{y-3} = 0 \end{cases}$

4. Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 2{,}6y = 0$.



a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg!

A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérkőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)

b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak?

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egyik az *A* futószalagra kerül, a másik a *B* futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az *A* futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g és 46 g.

a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik!

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík 30°-os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát!

6. A H halmaz a nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: *Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.*

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Az *ABCDE* konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre. (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei!

7. Adott az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x = -15$-ben abszolút minimuma, $x = 0$-ban lokális maximuma, $x = 9$-ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9; 5[$ intervallumon!

c) A Newton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)dx$ határozott integrál értékét!

8. Dani sportlövészedzésre jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

a) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot?

A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vagy pontosan két találatot ér el.

c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani!

9. Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és az a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával.

Andrea szerint a kör sugara $R_A = \dfrac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P = \dfrac{ac-a^2}{b}$.

a) Igazolja, hogy $R_A = R_P$!

b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes!

Egy derékszögű háromszög oldalai a = 6 cm, b = 8 cm és c = 10 cm. Megrajzoljuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.

c) Számítsa ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúcstól!

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
4	6	4	4	5	7	7	8	6	5	11	3	3	5	5	9	4	3	5	6	5	5	4	7