I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2}=-x$

b) $2^{2(x-1)(x+4)}=4^{\frac{x-1}{x+4}}$ $(x \neq -4)$

2. Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának.
Hány méter magas a fa?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

3. Egy 50 adatból álló adatsokaság minden adata eleme a {0; 1; 2} halmaznak.

a) Legfeljebb hány 2-es lehet az adatsokaságban, ha az adatok átlaga 0,32?

b) Lehet-e az 50 adat mediánja 0, ha az átlaguk 1,04?

c) Lehet-e az 50 adat egyetlen módusza az 1, ha az átlaguk 0,62?

4. Aranyékszerek készítésekor az aranyat mindig ötvözik valamilyen másik fémmel. A karát az aranyötvözet finomsági fokát jelöli. Egy aranyötvözet 1 karátos, ha az ötvözet teljes tömegének $\frac{1}{24}$ része arany, a k karátos aranyötvözet tömegének pedig $\frac{k}{24}$ része arany.

Kata örökölt a nagymamájától egy 17 grammos, 18 karátos aranyláncot. Ebből két darab 14 karátos karikagyűrűt szeretne csináltatni.

a) Legfeljebb hány gramm lehet a két gyűrű együttes tömege, ha aranytartalmuk összesen sem több, mint az aranylánc aranytartalma?

b) Kata végül két olyan gyűrűt készíttetett, amelyek együttes tömege 16 gramm. (A megmaradó 14 karátos aranyötvözetet törtaranyként visszakapta.) Az elkészült két karikagyűrű tekinthető két lyukas hengernek, amelyek szélessége (a lyukas hengerek magassága) megegyezik. Az egyik gyűrű belső átmérője 17 mm, és mindenhol 1,5 mm vastag, a másik gyűrű belső átmérője 19,8 mm, vastagsága pedig mindenhol 1,6 mm.
Hány mm a gyűrűk szélessége, ha a készítésükhöz használt 14 karátos aranyötvözet sűrűsége 15 g/cm^3?

Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kell ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnyel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnyel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvutalványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnyel nem lehet nyerni semmit.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a legkisebb kihúzott szám a 3.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számokat növekvő sorrendben húzzák ki?

Az **a)** és **b)** kérdésekre adott válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Számolással igazolja, hogy (három tizedesjegyre kerekítve) a telitalálat valószínűsége 0,004, a négyes találat valószínűsége pedig 0,099.

d) Ha a húzás előtt 240 szelvényt adtak el, akkor mekkora az alapítvány lottóhúzásból származó hasznának várható értéke?

6. Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- az üzemeltetési költség x km/h átlagsebesség esetén $400 + 0{,}8x$ Ft kilométerenként;
- a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát km/h-ban, egészre kerekítve adja meg!

b) A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol

$$f\colon [0;6] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0;4] \\ \dfrac{x^2 - 12x + 36}{2}, & \text{ha } x \in]4;6] \end{cases}$$

Számítsa ki az embléma modelljének területét!

7. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

a) Számítsa ki a hatszög területének pontos értékét!

b) Az $ABCDEF$ hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot.

Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$ határértéket! (Pontos értékekkel számoljon!)

8. Melyek azok a tízes számrendszerben kétjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek számtani és harmonikus közepének a különbsége 1?

9. Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre A, B, C, D és E.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak?

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén A-ból C-be, ha a B, D és E pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az A pontot csak az út kezdetén, a C pontot csak az út végén érinthetjük.)

c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul?

Pontszámok:

1a	1b	2	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	7a	7b	8	9a	9b	9c
4	7	12	4	7	3	4	10	3	4	4	5	8	8	6	10	16	4	4	8