

I.

1. Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvonnának, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete?

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10.000.000
40	50.000
800	10.000
150.000	1.000
400.000	500
1.000.000	200
3.449.156	0

2. Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

3. Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos(\log_2 \sqrt{x})$

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$

c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$

4. A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a **tengerjáró hajót**, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót?

Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg!

Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el!

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Adott két párhuzamos egyenes, e és f . Kijelölünk e -n 5, f -en pedig 4 különböző pontot.

a) Hány (e -től és f -től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont?

Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?

Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?

b) A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az e egyenes 5 pontja is azonos színű és az f egyenes 4 pontja is azonos színű lesz?

6. A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n -edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n - 1)$ -edik órában megtett útjának ($n \in \mathbf{N}$ és $n > 1$).

a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója?

Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg!

A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t tesz meg.

b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni?

A „Végkimerülés” kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.

c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés” kategóriában?

7. Egy üzemben 4000 cm^3 -es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománccfestéssel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

a) Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománccfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak!

b) Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománccfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát!

c) Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes?

8. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2; 1)$, $B(7; -4)$, $C(11; p)$.

Határozza meg a p paraméter **pontos értékét**, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60° -os.

9. a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja!

(1) Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.

(2) Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.

b) Az A , B , C , D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezzünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A , B , C , D , E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?

Pontszámok:

1a	1b	1c	2	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8	9a	9b
3	4	4	13	3	5	5	7	7	11	5	4	6	6	3	9	4	16	6	10