

I.

1. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(3; 5)$ és $B(7; 1)$. A háromszög harmadik csúcsa illeszkedik az y tengelyre.
 - a) Számítsa ki a háromszög harmadik csúcsának koordinátáit!
 - b) Írja fel a háromszög köré írt kör egyenletét!
2. Adott egy kék és egy piros kocka. A piros kocka felszíne 25%-kal kisebb, mint a kék kocka felszíne. Hány százalékkal kisebb a piros kocka térfogata, mint a kék kocka térfogata?
3. Az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet valós gyökei eggyel kisebbek, mint az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei.
 - a) Számítsa ki a p valós paraméter értékét!
 - b) Számítsa ki mindkét egyenlet valós gyökeit $p = 5$ esetén!
4. Egy 30 fős tudóscsoport a számítógépeknek a kutatásban, az oktatásban és a kommunikációban betöltött szerepével foglalkozik. Közülük mindenki publikált már legalább az egyik témában. A csoport tagjai közül 12-en írtak már tanulmányt a számítógép kutatásban betöltött szerepéről, 18-an a számítógép oktatásban betöltött szerepéről, és 17 tudós jelent meg tanulmánya a számítógépnek a kommunikációban betöltött szerepéről. A csoportban 7 olyan tudós van, aki a fentiek közül pontosan két témakörben jelentetett már meg tanulmányt.
 - a) Egy televíziós beszélgetésre véletlenszerűen kiválasztanak a csoport tagjai közül egy tudóst. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott tudós mindhárom témakörben jelent már meg tanulmánya?
 - b) Hány olyan tudós van a csoport tagjai között, aki kifejezetten specialista, azaz csak az egyik témakörben jelent meg tanulmánya?

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy középkori, román stílusban épült templom tornyának tetőrésze egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. A felújítás alkalmával ebben a tetőrészben egy olyan maximális méretű kocka alakú helyiséget alakítottak ki, amelynek járósíntje a gúla alaplapján van, mennyezetének sarkai a gúla oldaléleire illeszkednek.
 - a) Mekkora a tetőtéri helyiség alapterülete, ha a gúla élei 8 m hosszúak?
 - b) A toronytető légtérének hány százalékát foglalja el ez a helyiség?
6. Adottak az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 10x - 22$ és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = -x + 6$ függvények.
 - a) Oldja meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet!
 - b) Írja fel az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y = f(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét!
 - c) Ábrázolja az f és a g függvény grafikonját! Számítsa ki az $y = f(x)$, $y = g(x)$ egyenletű grafikonok és az $x = 6$ egyenletű egyenes által közrefogott, az y tengelyhez közelebbi síkidom területét!
7. A Szegedről Budapestre közlekedő vonat hétfőn Cegléd és Budapest között pályaépítési munkálatok miatt harmadára volt kénytelen csökkenteni az addigi átlagsebességét. Hétfőn a Cegléd-től számított 19 km-es szakaszon újra a régi átlagsebességével mehetett, viszont utána Budapestig megint harmadakkora lehetett csak a vonat átlagsebessége. Így hétfőn 30 perccel többet késett, mint a hétfőn.
 - a) Mekkora a vonat eredeti átlagsebessége km/h-ban?

A MÁV költségvetésének összeállításához gyakran készít statisztikát arról, hogy az egyes vonalakon utazó utasok között hogyan oszlanak meg a kedvezmények, a menetjegy árak. Az egyik Budapestről Szegedre közlekedő vonaton, ahol csak II. osztályú kocsik voltak, összesen 400 utas utazott Budapesttől Szegedig (tehát az induló állomástól a végállomásig). Erre a távolságra nézve a teljes árú II. osztályú

menetjegy közelítőleg 2 000 Ft. (Az egyszerűség kedvéért ezzel az árral számolunk.) A jegyellenőrök minden utas esetében feljegyezték, hogy milyen jeggyel, milyen kedvezménnyel utazott. Az adatokat a következő táblázat foglalja össze. (x %-os mérséklésű a menetjegy, ha a teljes ár x %-kal csökkentett értékét kell fizetni érte.)

Menetjegy jellege	Teljes árú	20%-os mérséklésű	33%-os mérséklésű	50%-os mérséklésű	67,5%-os mérséklésű	75%-os mérséklésű	90%-os mérséklésű	95%-os mérséklésű	Ingyenes
Útasok száma	84	18	44	110	11	35	31	29	38
Tényleges jegyár (Ft)									

- b) Töltse ki a táblázatot, és határozza meg, hogy az átlagos jegyár hány százalékos mérséklésű jegyárnak felel meg!
8. a) A tízes számrendszerben felírt egyjegyű \overline{a} , kétjegyű \overline{ab} és háromjegyű \overline{bba} szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Számítsa ki a sorozat differenciáját és az első száz elem összegét!
- b) Bizonyítsa be, hogy egy mértani sorozat első n elemének, második n elemének és harmadik n elemének összege egy mértani sorozat három egymást követő eleme!
9. Egy gimnázium alapítványának kuratóriuma úgy döntött, hogy elindít egy lottójátékot, amelynek bevételeiből bizonyos részt a nyereményekre, bizonyos részt jótékonyági célokra fordít. Ebben a játékban heti rendszerességgel az első 40 pozitív egész számból húznak ki véletlenszerűen négyet. András a következő módon választja ki azokat a számokat, amelyeket megjátsszik ezen a lottón: az első két szám kiválasztása után harmadiknak az első két szám összegét, negyediknek pedig az első három szám összegét választja.
- a) Legfeljebb mekkorának választhatja András a legkisebb számot?
- b) Ha András a legkisebb számot a lehető legnagyobbak választja meg, akkor melyik számok szerepelhetnek a helyesen kitöltött szelvényen?
- c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Andrásnak telitalálata lesz, ha az egyik héten a fenti szabálynak megfelelő minden egyes számnégyest pontosan egyszer megjátsszik?

Pontszámok:

1a	1b	2a	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	9a	9b	9c
4	8	12	9	4	10	4	9	7	3	7	6	10	6	7	9	4	4	8