

## I.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a)  $0,5^{2-\log_{0,5} x} = 3$ , ahol  $x > 0$  és  $x \in \mathbf{R}$

b)  $7 + 6 \log_x \frac{1}{2} = \log_2 x$ , ahol  $1 < x \leq 2$  és  $x \in \mathbf{R}$

2. István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek  $120^\circ$ -os szöget zárnak be.

a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek bekerítéséhez?

„Mekkora házat szeretnél rá építeni?” – kérdezte Péter.

„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül  $100 \text{ m}^2$  alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építtetjük” – válaszolt István.

„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el” – szólott nevetve Péter.

b) Rajzolja le, hogy milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter!

c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát  $\text{m}^2$ -re kerekítve adja meg!)

3. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor koordinátái a  $t$  valós paraméter függvényében:  $\mathbf{a}(\cos t ; \sin t)$  és  $\mathbf{b}(\sin^2 t ; \cos^2 t)$ .

a) Adja meg az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha  $t$  az  $\frac{5\pi}{6}$  számot jelöli!

b) Mekkora az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok hajlásszöge  $t = \frac{5\pi}{6}$  esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!)

c) Határozza meg a  $t$  olyan valós értékeit, amelyek esetén az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok merőlegesek egymásra!

4. Az  $(a_n)$  mértani és a  $(b_n)$  számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja  $(-1)$ .

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját!

b) Milyen pozitív egész  $n$ -re lesz a két sorozat első  $n$  tagjának összege ugyanakkora?

## II.

**Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát jelölje meg!**

5. A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztnéve  $B$  betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.

A család tagjairól még a következőket tudjuk:

– csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is;

– egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;

– Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani – sikertelenül.

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szült.

c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnévűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű?

6. Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszerelésben árulják.
- a) Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon lévő összes ecetet összeöntենék?  
Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet, valamint a tiszta víz literenkénti árából kalkulálják ki.
- b) Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft és a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra!)  
Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150 Ft, a 20%-os 156 Ft.
- c) Ha ezeket az árakat a b) részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát?
7. Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.
- a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?  
A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. Mindannyian ugyanazt a valószínűséget mondták. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.
- b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!)
8. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja a  $C(0; 7)$  pont, a szárak hossza  $\sqrt{53}$  egység. A háromszög másik két csúcsa ( $A$  és  $B$ ) illeszkedik az  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$  egyenletű parabolára.
- a) Számítsa ki az  $A$  és a  $B$  pont koordinátáit!
- b) Írja fel az  $ABC$  háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának a további közös pontja  $D$ . Határozza meg a  $D$  pont koordinátáit!
- c) Mekkora területű részekre bontja az  $ABC$  háromszöget a parabola íve?
9. Jancsi vázát készíti. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott  $m$  magasságú ( $m > 10$ ) gömbszelet határoló köréhez egy szintén  $m$  magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszelet határoló kör sugarával.  
Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet  $m$  magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatalpra fogják állítani.)  
Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága  $m$ , a határoló kör sugara pedig  $r$ , akkor a térfogata:
- $$V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$$

Pontszámok:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1a | 1b | 2a | 2b | 2c | 3a | 3b | 3c | 4a | 4b | 5a | 5b | 5c | 5d | 6a | 6b | 6c | 7a | 7b | 8a | 8b | 8c | 9  |
| 4  | 7  | 4  | 2  | 7  | 2  | 5  | 7  | 4  | 9  | 5  | 3  | 5  | 3  | 3  | 5  | 8  | 5  | 11 | 6  | 4  | 6  | 16 |