

**I.**

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a)  $\lg(x + 7) + \lg(3x + 1) = 2$

b)  $2^x = 3^{2x+1}$

2. Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-át, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.

a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel?

b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott pontok összege 10?

3. Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin \alpha : \sin \beta = \cos(\alpha + \gamma) : \cos(\beta + \gamma),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű!

4. Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobtunk, és feljegyeztük a fejek és írások számát.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobtunk, mint írást?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál?

**II.**

**Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!**

5. Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

a) A kész talapzatnak

- hány éle;
- hány csúcsa;
- hány lapja van?

b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne?

c) Egy ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb, a hét zöld jade tárgy mindegyike 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél. A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől?

6. Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az  $m(t) = 12 - \frac{10}{t+1}$  képlet;

a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula:  $h(t) = 5 \cdot \sqrt{0,4t+1} + 0,4$ . Mindkét formulában  $t$  az 1969 óta eltelt időt jelöli években ( $t \geq 1$ ), és a magasságot méterben számolják.

a) Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagramon, amely a magasság értékeket az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket!

b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot?

- c) Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amelynek magasságát a  $g(t) = t^3 - 16,5t^2 + 72t + 60$  képlet írja le! (A magasságot centiméterben számolják,  $t$  az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és  $t \leq 21$ .)

7. Egy hűrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya 7 : 6 : 8.

- a) Mekkora a hűrnégyszög szögei?

Matematika órán, miután minden diák megoldotta a feladatot, három tanuló a következőket állította:

Zsófi: A hűrnégyszög minden szöge egész szám.

Peti: A hűrnégyszögnek van derékszöge.

Kata: A hűrnégyszög egyik szöge  $110^\circ$ -nál is nagyobb.

- b) A három tanuló állítása közül melyik igaz a feltételnek megfelelő hűrnégyszögre?

8. Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer ( $S$ ) síkjában.

Az  $A$  halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira:  $4x - 3y \geq 18$ ,

azaz  $A := \{P(x; y) \in S \mid 4x - 3y \geq 18\}$ ;

a  $B$  halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira:  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0$ ,

azaz  $B := \{P(x; y) \in S \mid x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0\}$ ;

a  $C$  halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira:  $y^2 = 4$ ,

azaz  $C := \{P(x; y) \in S \mid y^2 = 4\}$ .

- a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatot alkotnak az  $A$ , a  $B$  és a  $C$  halmaz pontjai!

- b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a  $B \setminus A$  halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz?

- c) Ábrázolja a  $B \cap C$  halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik  $P(x; y)$  pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától?

9. Egy  $(a_n)$  számsorozatról a következőket tudjuk:

- a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével:

$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2};$$

- az  $a_1$ ,  $a_2$  és  $a_3 - 9a_1$  ebben a sorrendben egy számtani sorozat 3 egymást követő tagja;

- az  $(a_n)$  sorozat első öt tagjának összege 682.

Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja?

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	9
5	6	2	10	14	7	7	3	6	7	6	4	6	13	3	8	4	4	16