I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$$

2. Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel?

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

3. Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik.
160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy

- az esetek 18,75%-ában az automata elnyeli a pénzt, és nem ad italt;
- 90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna;
- 30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja;
- és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen.

a) Mekkora annak az esélye az adatok alapján, hogy egy százast bedobva az automata rendeltetésszerűen fog működni?

b) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy ingyen ihatunk, vagy annak, hogy ráfizetünk?

c) Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-szor próbál vásárolni ennél az automatánál?

4. Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, a felbontást az alábbi módon kezdve:

(1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), …

a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme?

b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme?

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Az *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD*, és *AB* > *CD*. A trapéz átlóinak metszéspontja *K*. Az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kétszerese a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságának. Jelölje *T* az *ADK* háromszög területét.
Hányszorosa az *ABCD* trapéz területe *T*-nek?

6. A „TOJÁS” farmon átlagosan 10.000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalták, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt – ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.

a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés?

Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának p %-kal történő csökkentése $2p$ %-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p < 30$ esetén érvényes.

b) Hány százalékkal csökkentették a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt?

7. A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen” elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges párosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll.

b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén” lévő pöttyök számának összege 8?

c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük”, amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.)

8. Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében!

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait.
Mekkora x esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális?

9. Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}\left(\lg a; \lg b\right)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab; \lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0 < a < 1$, illetve $1 < b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátájánál!

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra!

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge?

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve a B pontok halmazát!

Pontszámok:

1	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	5	6a	6b	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b	9c	9d
12	2	6	4	4	5	4	5	9	16	5	11	5	3	8	6	10	3	3	4	6