



Rácz János matematika emlékverseny 2009/2010

9-10. évfolyam

II. forduló (2009. december 15. – 2010. március 15.)

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyik nem osztható 1-től különböző négyzet számmal és nincs 41-nél nagyobb prímosztója?
2. Adott egy e egyenes egyik partján 2 pont, P és Q , továbbá egy c szakasz, és egy γ hegyesszög. Szerkesztendő az ABC háromszög, melynek A és B csúcsa illeszkedik e -re, $AB = c$, valamint a C csúcsnál fekvő γ szög két szára átmegy a P ill. a Q ponton.
3. Bizonyítandó, hogy ha egy egyenes felezi egy háromszög területét és kerületét, akkor ez az egyenes áthalad a háromszög beírható körének középpontján.
4. Egy asztalitenisz bajnokságon 2009 játékos indul, egyenes kiesési rendszerben játszanak. Hány mérkőzést kell lejátszani addig, amíg a bajnok megszületik?
5. Mi a maradék, ha a $2009^{2010} + 2010^{2009}$ összeget elosztjuk $2009 \cdot 2010$ -zel?
6. Legyenek a , b , c és d olyan pozitív egész számok, melyekre $ab=cd$. Bizonyítandó, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nem lehet prímszám.
7. Milyen (x,y) értékpár esetén lesz a

$$K = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 y^2}$$

kifejezés értéke a legkisebb?

8. Az ABC háromszög egy belső pontja P . Az AP egyenes a BC oldalt A_1 -ben, a BP egyenest B_1 -ben metszi. Az APB_1 , ABP , BPA_1 háromszögek területei rendre 5, 10 illetve 8 területegység. Mekkora a területe az A_1CB_1P négyszögnek?
9. A p és q prímszámokra és az n természetes számra

$$n^2 = p^2 + q^2 + p^2 q^2$$

teljesül. Határozzuk meg az összes ilyen számhármast!

10. Egy n tagú társaság ($n > 3$) bármely 4 tagja között van olyan, aki ismeri a másik hármat. Legalább hány személy található a társaságban, aki ismeri a társaság minden tagját? (Az ismeretség kölcsönös.)