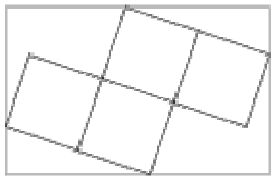
OKTV gyakorló feladatok

Böszörményi Bence

1. Egy téglalap alakú ABCD biliárdasztal A csúcsából a szögfelező irányában ellökünk egy golyót, mely a CD, BC majd AB oldalakról visszapattanva éppen telibe találja a téglalap közepén álló golyót. Milyen más irányban lökhetjük még el a golyót az A pontból, hogy három különböző oldalról visszapattanva szintén telibe találja a középen álló golyót?
2. Egy 11-szer 7-es téglalapból négy egybevágó négyzetet kivágtunk az ábrán látható módon. A téglalap hány százaléka hulladék?



3. Minden négyjegyű szám négyzetgyökét kiszámoltuk, és amennyiben nem egész számot kaptunk, egészre kerekítettük. Felfelé vagy lefelé kerekítettünk többször?
4. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget: $2(x^4+x^2y^2+y^4) \geq 3xy(x^2+y^2)$.

Glaser Ádám

5. Mutassuk meg, hogy ha n pozitív egész, akkor $\left[\left(\sqrt[3]{28}-3\right)^{-n}\right]$ nem osztható 6-tal.
6. Minden négyjegyű szám négyzetgyökét kiszámoltuk, és amennyiben nem egész számot kaptunk, egészre kerekítettük. Felfelé vagy lefelé kerekítettünk többször?
7. Oldjuk meg az $x^5-x^3y^2-x^3y-x^2y^3+y^2=0$ egyenletet az egész számok körében.
8. Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának két különböző pontja P és Q. A P-n átmenő AB-vel párhuzamos egyenes a BC és AD oldalakat K-ban és L-ben, a Q-n átmenő BC-vel párhuzamos egyenes pedig az AB és CD oldalakat M-ben és N-ben metszi. Mutassuk meg, hogy a PNM és a QKL háromszögek területe egyenlő.

Grosz Edward

9. Adott egy végtelen pontú teljes gráf, ahol az élek színe piros, vagy kék. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfnak olyan részhalmaza, amin belül az élek egyszínűek!
10. Egy téren 121 gyík lebzsel. Mindenki a hozzá legközelebbire néz. Bizonyítsuk be, hogy van flörtölő páros!
11. $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)=?$
12. Melyik az az n természetes szám, amire igaz: $\log_2 3+\log_3 4+\ldots+\log_n(n+1)=10$?
13. Oldjuk meg a valós számok halmazán: $x+2y+3z=2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}+\sqrt{3z-1}\right)$.
14. Hány darab huszárt lehet egy sakktáblára rakni úgy, hogy ne legyen olyan, amit ketten is ütnek?

Gulyás Milán

15. Egy börtöncellában lévő rabnak bevisznek 2 db 1 m hosszú kötelet és egy csomag gyufát. Azt mondják neki, hogy mindkét kötél pontosan 1 óra alatt ég végig, viszont teljesen *egyenetlen sebességgel*. Közlik vele, hogy ha pontosan 45 perc múlva kopogtat a cella ajtaján, akkor szabadon engedik. Hogyan méri le a 45 percet? (A fent említett eszközökön kívül mást nem használhat.)
16. Van egy csodafa, ami az első nap megnő másfélszeresére, második nap egy egész egyharmadszorosára, harmadik nap egy egész egynegyedszeresére, és így tovább. Hányadik napon fog megnőni eredeti magasságának 100-szorosára?
17. Négy bogár (A, B, C és D) áll egy 10 cm oldalhosszúságú négyzet egy-egy sarkában. Egyszerre megindulnak: A bogár B felé mászik, B bogár C felé, C bogár D felé, és D bogár A felé. Mind a négyen állandó és egyforma sebességgel másznak, minden időpillanatban a másik bogár felé. (*Nem az eredeti, hanem az aktuális helye felé!*) Milyen pályát írnak mozgásuk során? Mekkora utat tesznek meg fejenként, mire - a kiindulási négyzet középpontjában - találkoznak?
18. Van egy várbörtön, abban 400 cella, minden cellában egy-egy rab. A zárak úgy működnek, hogy egy fordításra zár, a következőre fordításra nyit, aztán ismét zár, és így tovább. Pillanatnyilag minden cella zárva van. A várúrnak születésnapja van, valami jót akar cselekedni, ezért elküld egy őrt, hogy minden záron fordítson egyet. Hanem rájön, hogy így rab nélkül marad a nagy börtöne (és milyen várbörtön az ilyen...), ezért a következőt találja ki: elküldi a második őrt azzal, hogy most minden második záron fordítson egyet (a másodikkal kezdve), majd küldi a harmadikat, és neki minden harmadik záron kell fordítania. És így tovább egészen a 400. őrig (marha sok őre volt...), aki már csak a 400. ajtó zárján fordít egyet. Ezek után, amelyik cella ajtaja nyitva van, azt a rabot szabadon engedik. Mennyire volt végül nagylelkű a születésnapját ünneplő várúr, vagyis hány rabot engedett szabadon?
19. Oldja meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet: $x^3-y^3=602$
20. A p paraméter mely értékei mellett esik az $x^2+px+9=0$ egyenlet egyik gyöke az [1; 2], másik gyöke pedig a [4; 5] zárt intervallumba?
21. Két okos, matematikában is jártas logikus, Ödön és Szilárd egy feladaton dolgoznak. Két ismeretlen egész számot, x-et és y-t kell kitalálniuk, melyekre igaz, hogy $1 < x < y$ és $x+y < 100$. Ödön az x+y összeget kapja adatként, Szilárd pedig az xy szorzatot. A fenti feltételt Ödön és Szilárd tudja.
   A következő párbeszéd zajlik közöttük:
   Sz: Nem tudom meghatározni a keresett két számot!
   Ö: Ezzel tisztában voltam!
   Sz: Most már tudom, melyek azok a számok!
   Ö: Most már én is tudom!
   Melyek az x és y számok?

Markovics Mátyás

22. Az x_0 , x_1, , x_2 , ... sorozatban x_0 = a , x_1, = b adott pozitív számok és a sorozat további tagjainak képzési szabálya: $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+1}{x_n}$ $(n = 0,1,2...)$ Fejezzük ki x_{1998} értékét a és b segítségével!
23. Határozza meg a $2x^5 + 3x^4 -2x^3 -x^2 +3x +1$ polinom számértékét, ha $\frac{1}{x} = 1 - x^2$.
24. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! $x + \sqrt[8]{x^5} - 12\sqrt[4]{x} = 0$
25. Egy sorozatban $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, ha n>1. Állítsuk elő a_n-et n függvényeként!

Papp Pál András

26. Egy valós számokból álló sorozatban bármely 7, egymást követő tag összege negatív, és bármely 11, egymást követő tag összege pozitív. Mennyi egy ilyen sorozatban a tagok számának maximuma?
27. Legyen n, m pozitív egész. Határozzuk meg $|36^m-5^n|$ legkisebb étékét!
28. Adott néhány pont a síkban, bármely kettő távolsága különböző. Lássuk be, hogy ha minden egyes pontot összekötünk a legközelebbi szomszédjával, az így kapott szakaszoknak a végpontjukon kívül nincs közös pontjuk.
29. Mutassuk meg, hogy minden valós x-re $(\sin x + 2\cos 2x)(2\sin 2x - \cos x) < 4{,}5$
30. Egy szabályos n-szög csúcsaiba valamilyen sorrendben beírjuk az 1, 2, ..., n számokat. Ezután minden élre ráírjuk a végpontokba írt számok különbségének abszolútértékét. Mennyi az élekre írt számok összegének minimuma? Hány olyan elrendezés van, amire ez a minimum létrejön, ha az *elforgatással* egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek?
31. Adottak egy egyenesen a P_1, P_2, ..., P_k pontok. Mindegyik pontpár mint átmérő fölé kört rajzolunk, és ezen körvonalak mindegyikét kiszínezzük n különböző szín valamelyikével. Mutassuk meg, hogy ha $k > 2^n$, akkor lesz két egyforma színű, egymást kívülről érintő kör! (Ha nagyon unjuk magunkat, lássuk be azt is, hogy $k=2^n$ esetén ez még nem feltétlenül igaz!)
32. Egy tolmácscégnek 70 dolgozója van. Bármely két, A és B dolgozójához található olyan nyelv, amelyet A beszél és B nem, és olyan is, amit B beszél és A nem. Legalább hány különböző nyelvet beszélnek a vállalat dolgozói?
33. Legyenek p és q olyan természetes számok, amikre igaz, hogy
$$p/q = 1 – ½ + 1/3 – ¼ +… - 1/1318 + 1/1319.$$
Mutassuk meg, hogy p osztható 1979-cel!
34. Adjuk meg az összes olyan N négyjegyű természetes számot, amelyre amelyekre N=pqr, ahol p, q és r különböző prímszámok, pq-r=3 és pq+r prímszám!
35. Egy nemzetközi társaságnak 1978 tagja van 6 különböző országból. Ezeket 1-től 1978-ig megszámozták. Bizonyítsuk be, hogy legalább egy olyan tag van, akinek a sorszáma megegyezik két honfitársa sorszámának összegével, vagy duplája egy honfitársa sorszámának!
36. Az m, n természetes számokra n>m>1. Az 1978^m, valamint az 1978^n tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó három jegy sorrendben is megegyezik. Keressük meg azt az m-et és n-et, amire m+n a lehető legkisebb!
37. Egy egyfordulós körmérkőzéses sakkbajnokság után akárhogy választunk ki néhányat a résztvevők közül, mindig találhatunk hozzájuk olyan résztvevőt (aki közülük való is lehet), aki velük összesen páratlan számú döntetlen játszott. Lássuk be, hogy a bajnokságnak páros számú résztvevője volt!
38. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan, minden valós számon értelmezett függvény, amire $f(f(x))=x^2-2$.
39. Ha p>3 prímszám, akkor
$$(p-1)!(1+1/2+1/3+...+1/(p-1)) \equiv 0 \bmod p^2.$$

Pető Zoltán

40. (32.) Egy bizottság pályázatokat rangsorol úgy, hogy a bizottság minden tagja külön-külön készít egy teljes rangsort valamennyi pályázatról. Tudjuk, hogy a bizottsági tagok többségének a rangsorában az "A " pályázat előrébb szerepel, mint a "B" pályázat, és azt is tudjuk, hogy a tagok többségének a rangsorában a "B" pályázat előrébb szerepel, mint a "C" pályázat. Következik-e ebbó1, hogy a tagok többségének a rangsorában az "A" pályázat előrébb szerepel, mint a "C" pályázat?
41. (33.) Egy hegyesszögű háromszög oldalai legyenek a, b, c, a megfelelő magasságvonalak m_a, m_b, m_c, és a magasságpontnak a csúcsoktól való távolságai rendre d_a, d_b, d_c. Bizonyítsuk be, hogy $m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = (a^2+b^2+c^2)/2$.
42. (34.) Legyen az ABC háromszög köré írt kör sugara r, a súlypontot a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja pedig F. Bizonyítsuk be, hogy $AF^2+BF^2+CF^2=3r^2$.
43. (35.) Egy dobozban 4 fehér és 4 piros golyó van. Visszatevés nélkül kihúzzuk az összes golyót. Minden húzás előtt tippelhetünk a kihúzandó golyó színére. Átlagosan hány találat érhető el, ha mindig arra a színre tippelünk, amelyiknek nagyobb a valószínűsége?
44. (36.) Adjuk meg az összes olyan köbszámot, amely előáll nyolc szomszédos egész szám köbének az összegeként. (Köbszámon egy egész szám köbét értjük.)

Szabó Máté

45. (37.) Igazoljuk a Fibonacci sorozatra hogy:
$F_n^2+F_{n-1}^2=F_{2n-1}$
$F_{n+1}F_n+F_nF_{n-1}=F_{2n}$
46. (38.) Egységkockákat színezünk 6 színnel (minden oldalt más színűre festünk). Az azonos színű oldalak mentén összeragasztjuk őket, és téglatestet építünk belőlük. Milyen *k*, *l*, *m* számok esetén építhetünk $k \times l \times m$ -es téglatestet, melynek minden oldala különböző színű?
47. (39.) Az r és s valós számok összege 1. Igazoljuk hogy $r^r s^s + s^r r^s \le 1$.

48. (40.) Egy négyzet 4 csúcsából egy-egy teknős indul. Mindegyik a szomszédját üldözi (mondjuk az óramutató járásával ellentétesen. Csak az a lényeg hogy forgásszimmetrikus legyen az ábra), tehát sebességvektora bármelyik pillanatban felé mutat. Sebességük azonos, és állandó. Milyen pályán mozognak a teknősök?

Tran Hoang Viet

49. (41.) Egy valós számokból álló véges sorozatban bármely 7 közvetlenül egymást követő tag összege negatív, míg bármely 11 közvetlenül egymást követő tag összege pozitív. Állapítsuk meg egy ilyen sorozatban a tagok számának a maximumát.
50. (42.) Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói az oldalakkal, ha a szögfelezői által határolt négyzet területe egyenlő a téglalap területével?
51. (43.) Tükrözzük az *ABC* hegyesszögű háromszög M magasságpontját az *AC* oldal F felezőpontjára, legyen a tükörkép M'. Mekkora az *AM'*C szög és az *MAM'* szög, ha a háromszög B-nél levő belső szöge 52?
52. (44.) Egy gyilkosságnak öt gyanúsítottja van. A kihallgatás során a következő állítások hangzanak el:
A: C és D hazudik.
B: A és E hazudik.
C: B és D hazudik.
D: C és E hazudik.
E: A és B hazudik.
Ki hazudik?
53. (45.) Oldjuk meg a
$$\frac{2^{(x+1)^2}}{2^{(x-1)^2}} = 4^{x^2}$$ egyenletet.
54. (46.) Egy egyenlőszárú trapéz párhuzamos oldalainak a hossza 15,3 és 25,2 cm. A hosszabbik párhuzamos oldal végpontjaiból a rövidebbik olyan szög alatt látszik, amelynek tangense 0,75. Számítsuk ki a trapéz területét.
55. (47.) Egy rombusz átlóinak hossza 6 és 8 egység. A rombuszba olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek egy csúcsa a rombusz rövidebb átlójának egyik végpontja, egy oldala pedig párhuzamos a rombusz hosszabbik átlójával. Milyen hosszú ennek a háromszögnek a magassága?
56. (48.) Adott a konvex *ABCD* négyszög. (A csúcsokat pl. az óramutatóval ellentétes körüljárási irányban betűztük meg.) Igazoljuk, hogy ha az *ABC*, *BCD*, *CDA* és *DAB* háromszögek kerülete egyenlő, akkor
$$AB^2+BC^2=CD^2+DA^2$$
(AB^2 jelöli az *AB* oldal mérőszámának négyzetét.)

Zemcov Tamás

57. (49.) Egy papírlapra felírtuk a számokat 1-től 2009-ig. A második lépésben mindegyik szám kétszeresét is felírtuk a papírra, majd kiradíroztuk azokat a számokat, amelyek kétszer is szerepeltek. Ezt a lépést ismételgetjük olyan módon, hogy az i-edik lépésben az 1,2,...,2009 számok mindegyikének i-szeresét is felírjuk a papírra, majd kiradírozzuk azokat a számokat, amelyek kétszer is szerepelnek. Hány szám lesz a papírlapon a 2009. lépés után?
58. (50.) Egy háromszög C csúcsánál levő szöge derékszög. A C-hez tartozó szögfelező és magasság a köré írt kört a D, illetve az E pontban metszi. A háromszög nem rövidebbik befogója b. Igazoljuk, hogy a CDE töröttvonal hossza $b\sqrt{2}$.
59. (51.) Igazoljuk, hogy ha egy háromszög oldalaira $2b^2=a^2+c^2$ teljesül, akkor a háromszög megfelelő szögeire
$$2\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma$$
60. (52.) Legyen *n* pozitív egész. Határozzuk meg a
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{n}$$ szám tizedesvessző utáni első számjegyét.

Hai Nguyen

61. Az x_n sorozat a következőképpen van definiálva:
$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1} + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}$$
Bizonyítsuk be, hogy az y_n sorozatnak, ahol $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^2{}_i}$, van határértéke, és keressük meg ezt a határértéket.
62. Legyen *x*, *y*, *z* egymástól különböző nem negatív számok. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{(y-z)^2} - \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+yz+zx}.$$
63. Vegyük k_1 kört, ami belülről érinti k_2 kört, *S* pontban. Valamint k_1 érinti k_2 *AB* húrjat *T*-ben. Legyen k_1 középpontja *O*, és *AO* egyenes egy pontja *P*. Bizonyítsuk be, hogy $PB \perp AB$ akkor és csak akkor, ha $PS \perp TS$.
64. Legyen *ABC*Δ egy hegyesszögű háromszög, ahol *AB≠AC*. Legyen *M* a magasságpont és *F* a *BC* oldal felezőpontja. Vegyük fel az *AB* egyenesen *D* pontot és az *AC* egyenesen E pontot úgy, hogy *AD≠AE* és *D*, *H*, *E* pontok egy egyenesbe essenek. Bizonyítsuk be, hogy *MF* merőleges az *ABC*Δ és az *ADE*Δ köréiíható köreneinek által alkotott közös húrra.
65. Keressük meg az összes olyan $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ függvényt, hogy akármilyen $m,n\in\mathbf{N}$ -re
$$m\cdot f(n)+n\cdot f(m)=(m+n)\cdot f\left(m^2+n^2\right).$$

66. Adott a síkon $n > 2$ darab vektor. Egy vektort akkor nevezünk “hosszúnak”, ha a hossza nem rövidebb, mint a többi vektor összegének a hosszánál. Bizonyítsuk be, hogy ha az összes vektor “hosszú”, akkor a vektorok összege nullvektor.
67. Keressük meg az összes olyan $f : [0;\infty] \to [0;\infty]$ függvényt, melyre igaz a következő egyenlet:
$$f\left(x^2\right) + f(y) = f\left(x^2 + y + xf(4y)\right)$$
68. *ABC* háromszög *AC* oldalának felezőpontja legyen *F*. *B*-ből húzott merőleges talppontja *T*. Legyen *A* és *C* merőleges vetülete $ABC\angle$ szögfelezőjén rendre *P* és *Q*. Bizonyítsuk be, hogy *P*, *Q*, *F* és *T* egy körön helyezkednek el.
69. Bizonyítsuk be, hogy az
$x^2 + y^2 + z^2 = (x - y)(y - z)(z - x)$
egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében.

Kovács Viola

70. Bizonyítsuk be, hogy bármely öt egymás után következő egész szám négyzetének összege osztható 5-tel, de 25-tel nem osztható!
71. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszögnek van két olyan szöge, amelyek különbsége kisebb 30°-nál!
72. Az *ABCD* rombusz középpontjából az *AB* oldalra bocsátott merőleges talppontja *T*, a *D* csúcsból az ugyancsak *AB* oldalra bocsátott merőleges talppontja *U*, a *DU* szakasz felezőpontja *F*. Bizonyítsuk be, hogy *BF* merőleges *TC*-re!
73. Legyen *f* olyan nemkontans valós együtthatós polinom, amellyel minden *x*, *y* valós számra $f(x)f(y) \le f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy *f*-nek pontosan egy valós gyöke van.

Tanárok

74. (54.) Mi a valószínűsége, hogy a lottóhúzás 5 száma közt van legalább két szomszédos szám?
75. (55.) Határozzuk meg azokat a pozitív egész a, b számokat, amelyekre $\left(\sqrt{30} - \sqrt{18}\right)\left(3\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = 12$
76. (56.) Négy valós számból páronként kéttagú összegeket képzünk. A hat összeg közül négy racionális, kettő irracionális. Bizonyítsuk be, hogy a négy szám összege racionális!
77. (57.) Nevezzünk három, nem feltétlenül különböző, 1-nél nagyobb egészt barátságos számhármasnak, ha bármely kettő önmagánál kisebb pozitív osztóinak az összege a harmadik szám. Határozzuk meg az összes olyan barátságos számhármast, amelyben a(z egyik) legnagyobb szám páros.
78. (58.) Határozzuk meg a legnagyobb olyan *k* egészt, amely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: Minden olyan esetben, amikor az *x*, *y* egész számokra *xy*+1 osztható*k*-val, akkor *x*+*y* is osztható *k*-val.
79. (59.) Az *r* és *s* pozitív egészekről tudjuk, hogy bármely *k* pozitív egészre *ks*-nek legalább annyi osztója van, mint *kr*-nek. Lássuk be, hogy *r* osztója *s*-nek.
80. (60.) Bálint 200 forintot fizet Annának, ha a (90-ből 5-ös) lottón a kihúzott számok szorzatának utolsó számjegye 0 lesz (tízes számrendszerben), viszont Anna fizet Bálintnak 300 forintot, ha nem ez a helyzet. Hosszabb távon kinek előnyös ez a megállapodás?
81. (61.) Jelölje p_i az i-edik prímszámot, és legyen $Q_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. (Tehát pl. $Q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.) Igazoljuk, hogy az 1, 2,… , Q_k számok között pontosan $Q_k/2$ darab olyan van, amely a $p_1, \ldots, p_k$ közül páratlan sokkal osztható.
82. (62.) Mely $n \ge 2007$ egészek rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: bármely három különböző, n-nél nem nagyobb és az n-hez relatív prím pozitív egész összege is relatív prím n-hez?
83. Az ABC háromszög C csúcsából kiinduló egyenes az AB szakaszt D pontban metszi. Legyenek a CAD és CDB háromszögek beírt körei k_1 és k_2. A két kör (AB-től különböző)külső érintője a CD szakaszt E pontban metszi.
    a) Bizonyítandó, hogy a CE szakasz hossza független a D pont választásától.
    b) Szerkesztendő D, melyre k_1 és k_2 sugara egyenlő.
84. Az O kp-ú körön ebben a sorrendben felvett A, B, C és D pontokra igaz, hogy AB ív + CD ív a kör kerületének fele. Az OA, OB, OC és OD Thálesz-köre messe a "következőt" a P, Q, R illetve S pontban! Bizonyítandó, hogy PQRS téglalap!
85. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges háromszög szögfelezőinek a reciprokának az összege nagyobb az oldalai reciprokának az összegénél! (Oldjuk meg inverzió segítségével is!)
86. Az *ABC* háromszög oldalfelezőpontjai A_1, B_1 és C_1. Bizonyítsuk, hogy
    a) AC_1B_1, BA_1C_1 és CB_1A_1 körülírt köre átmegy 1 ponton!
    b) az $A_1B_1C_1$ körülírt köre átmegy a fenti háromszögek középpontjain.
    c) Jelölje az a.)-ban leírt háromszögek körülírt körének középpontját K_a, K_b és K_c. Ekkor bizonyítandó
    $4\overrightarrow{MK_a} + 4\overrightarrow{MK_b} + 4\overrightarrow{MK_c} = 15\overrightarrow{MS}$
87. Adott ABC háromszög. Legyen P tetszőleges pont, $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$ és $C_1 = CP \cap AB$. Bizonyítandó, hogy $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ csakkor, ha P=S!
88. Az ABCD húrnégyszögben (AB<BC és AD<DC) az A-ból a B belső szögfelezőjére állított merőleges messe BC-t P-ben, a körülírt kört Q-ban, hasonlóan a D belső szögfelezőjére állított merőleges DC-t R-ben, a kört S-ben. Igazolandó, hogy a BS, a DQ és a PR egyenesek egy pontban metszik egymást.