Rácz János matematika emlékverseny 2009/2010

11-12. évfolyam

I. forduló (2009. szeptember 15 – december 15.)

1. Az A illetve B középpontú k_A illetve k_B kör a C és D pontban metszik egymást. Az A-n, B-n és C-n átmenő kör k_A-t a P, k_B-t a Q pontban metszi C-n kívül. Bizonyítandó, hogy a CD egyenes felezi a PCQ szöget.
2. Igazoljuk, hogy végtelen sok x, y, z pozitív egész számhármasra teljesül a következő egyenlőség:

   $$x^7+y^8=z^9.$$
3. Az $ABCDE$ négyoldalú gúlában (E a gúla csúcsa) $\overrightarrow{AB}$ vektor = $2\overrightarrow{DC}$ vektorral, S a CDE háromszög súlypontja. Az ABS síkkal kettévágjuk a tetraédert. Add meg a két rész térfogatának arányát!
4. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész m-re

   $$\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{2m}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.$$
5. Az előzőtől mindig 1 egység távolságra húzunk 11 függőleges, majd 11 vízszintes egyenest. A keletkező metszéspontok közül húszat kijelölünk. Igazold, hogy a 20 pont által meghatározott szakaszok közt van 4 egyforma hosszú!
6. Igazold, hogy a $P(x)$ polinomnak nem lehet $2n$ db pozitív gyöke, ha $n>1$!

   $$P(x)=x^{2n}-2nx^{2n-1}+2nx^{2n-2}-\ldots+2nx^2-2nx+1$$
7. Két játékos a következő játékot játssza: 120^k darab kavicsból felváltva elvesznek 2 vagy 3 vagy 9 darabot. Az veszít, aki már nem tud venni. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? (k pozitív egész)
8. Hány olyan legfeljebb n jegyű pozitív egész van, amelynek négyzete ugyanarra az n jegyre végződik? (legfeljebb n jegyű: elején nullákkal n jegyre kiegészítve)
9. Adott a oldalú négyzet sarkaiba egyforma sugarú köröket rajzolunk, melyek átmennek a párhuzamos helyzetű belső négyzet csúcsain. Hogy válasszuk meg a belső négyzet oldalát, hogy a körök és a belső négyzet területének összege
   a. a legkisebb;
   b. a legnagyobb legyen?
10. Egy teremben p sorban és q oszlopban pq szék van ($p>1$, $q>1$). Minden széken egy-egy tanuló ül, mind különböző magasságú. A tanár minden sorból kiszemeli a legkisebbet, ezek legnagyobbikának magassága a. Ezután minden oszlopból kiszemeli a legnagyobbat, ezek legkisebbikének magassága b. Eldöntendő, hogy az $a<b$, $a=b$, $a>b$ esetek közül melyek lehetségesek, s hogy minden lehetséges eset bekövetkezése biztosítható-e az ülésrend megváltoztatásával.