Rácz János matematika emlékverseny
2008/2009
11-12. évfolyam II. forduló
(Beadási határidő: 2009. március 20.)

1. Egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek egyik oldala az *x*, egy másik oldala az *y* tengelyre illeszkedjék. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat!

2. Adottak a 2, 3, 4, …, 2008, 2009 számok és a belőlük képzett összes különböző tényezőkből álló két, három, …, 2008 tényezős szorzat (összesen $2^{2008}-1$ szám). Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész szám!

3. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{6z}=\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}},$$
$$x+y^2+z^3=14$$

egyenletrendszert a pozitív valós számok halmazán!

4. Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének sugara r, köréírható gömbjének sugara R. Igazoljuk, hogy

$$\frac{R}{r}\ge\sqrt{2}+1$$

5. Jelölje $M(a)$ az egész számegyenesen értelmezett $f_a(x)=\left|a+\cos 2x+\frac{1}{2+\cos^2 x}\right|$ (a tetszőleges valós szám) függvény maximumát. Határozzuk meg az $M(a)$ számok minimumát!

6. Jelölje egy trapéz két párhuzamos oldalának hosszát a és c, szárainak hosszát b és d, átlóinak hosszát e és f (a > c, d > b, f > e). Igazoljuk, hogy

$$d^2-b^2=(a-c)\frac{f^2-e^2}{a+c}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1>x_2>...>x_n>0$ valós számok $(n>1)$, akkor

$$\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1^4+x_2^4}+\frac{x_2^3-x_3^3}{x_2^4+x_3^4}+...+\frac{x_{n-1}^3-x_n^3}{x_{n-1}^4+x_n^4}<\frac{3}{2}\cdot\frac{x_1-x_n}{x_1x_n}$$

8. Igazoljuk, hogy ha $P(x)$ egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom és $x_1,x_2,...,x_n$ $(n\ge 3)$ különböző egész számok, akkor a következő egyenlőségek nem lehetnek egyszerre igazak:

$$P(x_1)=x_2,\qquad P(x_2)=x_3,\qquad \dots,\qquad P(x_n)=x_1$$

9. Melyik n természetes szám esetén van a $\left(2+x^2\right)^n+\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n=18$ egyenletnek legtöbb valós gyöke? (Csak a különböző gyököket számoljuk.)

10. Bizonyítsuk be, hogy hat egymás után következő pozitív egész szám szorzata nem lehet egy pozitív egész szám ötödik hatványával egyenlő!