Rácz János matematika emlékverseny
2008/2009
11-12. évfolyam
I. forduló (2008. szept.15 – dec.15.)

1. Határozzuk meg a maradékokat, ha a következő számokat 9-cel osztjuk!

65^{6n}; 65^{6n+1}; 65^{6n+2}; 65^{6n+3}

2. Határozzuk meg a következő számsorozat egymást követő n tagjának összegét!

1; 11; 111; 1111; …

3. Az A, B, C pontok rajta vannak az $y=\frac{1}{x}$ egyenletű hiperbolán. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög magasságpontja is ezen a hiperbolán van!

4. Egy egyenessel vágjunk ketté egy háromszöget két egyenlő területű részre úgy, hogy az egyenesnek a háromszögön belüli szakasza a lehető legrövidebb legyen!

5. Bizonyítsuk be, hogy $n>1$ egész szám esetén $\sqrt[3]{n-\sqrt{n}}+\sqrt[3]{n+\sqrt{n}}$ irracionális szám!

6. Határozzuk meg azt a legnagyobb p egész számot, amelyre igaz, hogy az 1; 2; …; 99; 100 számok bármelyik permutációjában van 10 egymást követő elem, amelyek összege legalább p!

7. Legyen p_n az n-edik prímszám, és $N=p_n+p_{n+1}$, ($n>1$). Bizonyítsuk be, hogy N legalább 3, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata!

8. A körbe írt négyszög $\overline{AC}$ átlójának a felezőpontja a $\overline{BD}$ átlón van. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{BD}^2$!

9. Határozzuk meg azt a valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amely eleget tesz a következő két feltételnek:

a. $xP(x)=(x-3)P(x+1) \qquad \forall x\in R$

b. $P(4)=-12$

10. Aladár, Béla, Cecil ebben a sorrendben egymás után dobnak szabályos dobókockával. Aki 6-ost dob, kilép. Mi a valószínűsége, hogy

a. Aladár, Béla, Cecil

b. Cecil, Béla, Aladár sorrendben lépnek ki?