Rácz János matematika emlékverseny
2008/2009
9-10. évfolyam
I. forduló (2008. szept.15 – dec.15.)

1. A 9x9-es tábla összes sorába és oszlopába írjuk be a számokat 1-9-ig úgy, hogy minden szám csak egyszer szerepelhet soronként és oszloponként. A nagy négyzetrács további 3x3-as négyzeteiben is csak egyszer szerepelhet minden szám. A feladat megoldásakor az első lépést kell indokolni, és a kitöltött táblázatot megadni.

		7		8			6	
6	4		9	2	7			
					4		2	7
		9	4		5			2
4	5	2			8	1	7	9
			2		9			
	8		7		2			
			8		6	7	1	3
	7			5		2		

2. Hányszor fordul elő az 1-es számjegy az $N = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...9}_{2008\ számjegy}$ szám 10-es számrendszerbeli alakjában?

3. a) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög bármely belső szögének szögfelezőjének háromszögbe eső darabja rövidebb, mint a szöget bezáró oldalak hosszának mértani közepe!
   b) Bizonyítsuk be, hogy a szögfelező háromszögbe eső darabjának négyzete egyenlő a közrefogó oldalak szorzatának és azon két szakasz szorzatának a különbségével, amelyekre a szögfelező a szemközti oldalt osztja.

4. Bizonyos számú veréb repked egy fa körül. Ha a fa minden ágán egy veréb ül, akkor n $(n \in N)$ verébnek nincs helye. Ha minden ágra n veréb ül, akkor n ágra nem jut veréb. Hány ága van a fának, és hány veréb repked körülötte?

5. 1987 darab különböző pozitív egész szám összege 3 948 167. Mutassuk meg, hogy van közöttük legalább 2 páros szám!

6. Egy 8x8-as sakktáblán hány téglalap látható? Hány négyzet van ezek között?

7. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$x(x + 3y) = 34$$
$$y(y - 5x) = -25$$

8. Egy természetes számnak 1991 osztója van. Bizonyítandó, hogy a szám nem osztható 1990-nel!

9. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^2 + 5 = \sqrt{x - 5}$$

10. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a $2p + 1$, $3p + 2$, $4p + 3$, $6p + 1$ számok mindegyike prím?